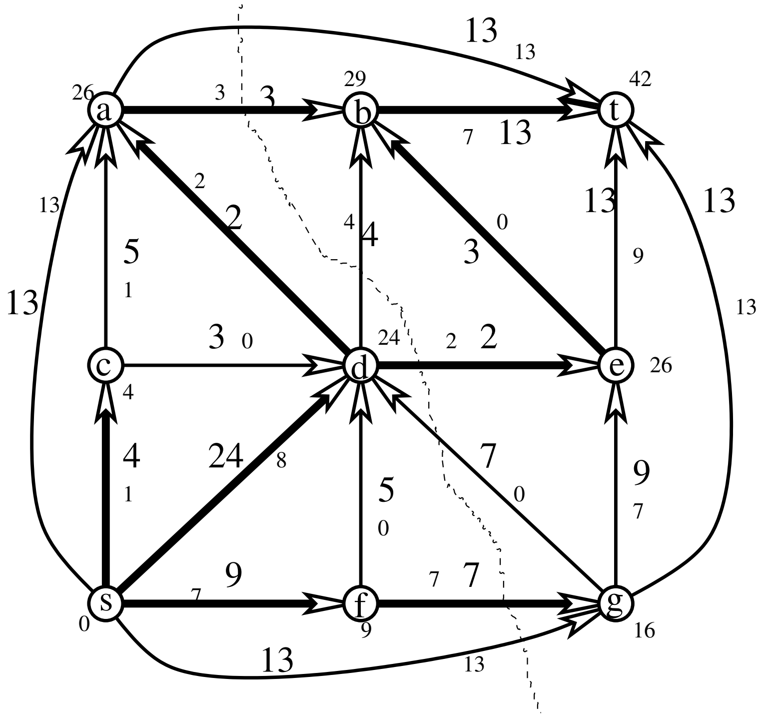
Bevezetés a számításelméletbe II. keresztfélév

2. pótZH javítókulcs

Az eredményeket legyetek szívesek emailben elküldeni, hogy kitölthessem a kartonokat. Természetesen az útmutatóban szereplőtől eltérő, ám helyes megoldásért teljes pontszám, hiányos megoldásért arányos részpontszám jár.



ábra

1. Az ábrán látható diagram segítségével megadott Pert problémában mennyi az összetett feladat végrehajtásához szükséges minimális idő, és mik a kritikus tevékenységek?

   Az tanult módszerrel (mindig forrást választva) meghatározhatóak a legkorábbi kezdési idők (a csúcsok melletti számok jelzik) és az azokat meghatározó (vastag) élek. (4 pont)
   A kritikus tevékenységek azok, melyek csupa vastag élből álló st úton vannak. (3 pont)
   Ezek alapján az a, b, d, e, s és t tevékenységek kritikusak és a minimálisan szükséges idő 42. (3 pont)

2. Határozzunk meg az ábrán megadott hálózatban egy maximális st-folyamot, és állapítsuk meg a maximális st-folyam értékét.

   A javító utak módszerével találunk egy folyamot, amit az élekre írt kis számok határoznak meg. (4 pont)
   E folyam értéke 42. (2 pont)
   Azért nincs ennél nagyobb folyam, mert a szaggatott vonallal jelzett vágás kapacitása szintén 42. (3 pont)
   A válasz tehát 42. (1 pont)

3. Legfeljebb hány éle lehet annak a 100-csúcsú, 7 pontú teljes gráfot nem tartalmazó, egyszerű G gráfnak, melynek 36 csúcsa piros, 32 fehér és 32 zöld, fehér csúcsból csak zöld csúcsba futhat él, és a zöld csúcsok mindegyikének legfeljebb 3 a fokszáma?

   A 32 zöld csúcsra legfeljebb $3 \cdot 32 = 96$ él illeszkedik. (2 pont)
   Ezen éleket elhagyva csak piros csúcsok között futó élek maradnak (2 pont)
   A piros csúcsokon nincs K_7, ezért a Turán tétel szerint legfeljebb $|E(T_{36,6})|$ él maradt. (2 pont)
   Mivel $T_{36,6}$ egy 36-csúcsú, 30-reguláris gráf, ezért $|E(T_{36,6})| = \frac{36 \cdot 30}{2} = 18 \cdot 30 = 540$. (1 pont)
   Összességében tehát G-nek legfeljebb $540 + 96 = 636$ db éle lehet. (1 pont)
   Ennyi él lehetséges is: a 32 zöld pont mindegyike legyen összekötve $3 - 3$ fehér ponttal, és a piros pontok pedig feszítsenek egy $T_{36,6}$ gráfot. Világos, hogy az így létrejövő G nem tartalmaz K_7-t, a többi feltétel pedig a konstrukció miatt triviálisan teljesül. (2 pont)

4. Bizonyítsuk be, hogy $D(a_1, a_2, \ldots, a_k) = D((a_1, a_2, \ldots .a_k))$ teljesül tetszőkeges pozitív egész a_i-k esetén. ($D(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok közös osztóinak halmazát jelöli, $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ pedig az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok legnagyobb közös osztója.)

   Legyenek $p_1, p_2, \ldots, p_l$ az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok kanonikus alakjában előforduló prímek. (1 pont)
   Ekkor minden a_i felírható $a_i = \prod_{j=1}^{l} p_j^{\alpha(i,j)}$ alakban. (1 pont)
   A d pozitív egész pontosan akkor közös osztó, ha előáll $n = (\prod_{j=1}^{l} p_j^{\beta(j)})$ alakban, ahol $\beta(j) \le \alpha(i,j)$ minden $i = 1, 2, \ldots, k$-ra. (3 pont)
   Eszerint közös osztók halmaza nem más, mint a $D := \prod_{j=1}^{l} p_j^{\min\{\alpha(i,j):1 \le i \le k\}}$) szám osztóinak halmaza. (3 pont)
   Vagyis D az $a_1, a_2, \ldots a_k$ számok legnagyobb közös osztója, és a közös osztók éppen D osztói. (2 pont)

5. Mik azok az a és x egész számok, melyek mind az $ax \equiv 42(101)$, mind a $42x \equiv a(101)$ kongruenciát kielégítik?

   A két kongruenciát összeadva $(a+42)x \equiv a+42(101)$ adódik, (2 pont)
   ahonnan $(a+42)(x-1) \equiv 0(101)$, azaz $101 \mid (a+42)(x-1)$. (2 pont)
   Mivel 101 prím, ezért $101 \mid a+42$ (azaz $a \equiv -42(101)$), (2 pont)
   vagy $101 \mid x-1$ (azaz $x \equiv 1(101)$) (2 pont)
   Első esetben a megoldás a $-42x \equiv 42(101)$ alapján az $x \equiv -1$, a második esetben $a \equiv 42(101)$ adódik (1 pont)
   Az ellenőrzés mutatja, hogy mindkét maradékosztály-pár valóban megoldás. (1 pont)

6. Tegyük fel, hogy a G csoport $K \leq G$ részcsoportjára igaz, hogy K minden jobboldali mellékosztálya egyúttal baloldali mellékosztály is. Bizonyítsuk be, hogy $K \trianglelefteq G$!

   Azt kell igazolni, hogy minden $g \in G$ esetén $gK = Kg$ áll. (3 pont)
   Legyen $g \in G$ tetszőleges! Ekkor $K \leq G$ miatt $e \in K$, ezért $g = eg \in Kg$ és $g = ge \in gK$. (3 pont)
   Más szóval $g \in gK \cap Kg$. (2 pont)
   Így a gK baloldali mellékosztály csakis a Kg jobboldali mellékosztállyal lehet azonos: $gK = Kg$. (2 pont)

7. Van egy gépünk, mely a következőképpen működik. Ha egymás után bedobunk a gépbe 7 golyót, akkor a gép a bedobott golyókat egy másik, rögzített sorrendben adja ki. (A rögzített sorrend pl. azt jelentheti, hogy a gép az utolsónak bedobott golyót adja ki elsőként, azt követően az másodiknak bedobottat, majd a maradék golyókat a bedobásuk fordított sorrendjében.) Tegyük fel, hogy a 7 golyónk 1-től 7-ig meg van számozva, és ezeket ebben a sorrendben bedobjuk a gépbe. A kiadott golyókat a kiadás sorrendjében ismét bedobjuk, majd ezt ismételjük, összesen 11-szer. Azt figyeltük meg, hogy a golyók kiadási sorrendje sosem az eredeti $1, 2, \ldots, 7$ volt. Bizonyítsuk be, hogy a 12-dik visszatáplálás után a golyók kiadási sorrendje ismét $1, 2, \ldots 7$ lesz.

   A gép működése egy $\sigma \in S_7$ permutációval írható le. (1 pont)
   Azt kell bizonyítani, hogy ha $\sigma, \sigma^2, \ldots \sigma^{11}$ egyike sem az identikus permutáció, akkor $\sigma^{12} = id$. (2 pont)
   Ez azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $\sigma \in S_7$ permutáció rendje legfeljebb 12 . (1 pont)
   Tudjuk, hogy σ rendje a σ ciklushosszainak legkisebb közös többszöröse. (2 pont)
   A ciklusok összhossza 7. (1 pont)
   Ha legalább 3 ciklus van, akkor vagy $1, 2, 4$ a ciklushosszok, vagy van két egyforma ciklusméret. (1 pont)
   Ezért van olyan, maximális rendű permutáció, melynek legfeljebb két ciklusa van. Ha a ciklusméretek 7 ill. $1, 6$, ill. $2, 5$, ill. $3, 4$, akkor a rend $7, 6, 10$ ill. 12 lesz, azaz a maximális rend csakugyan 12 . (2 pont)

8. Gyűrűt alkotnak-e az $\mathbb{F}_7$ (7-elemű véges test) feletti 7-dimenziós vektortér vektorai a szokásos vektorösszeadásra és a skalárral való szorzásra?

   A gyűrű algebrai struktúra, ezért a szorzás rajta (algebrai értelemben vett) művelet. (2 pont)
   A skalárral való szorzás (algebrai értelemben) nem művelet. (4 pont)
   Ezért a feladat kérdése nem algebrai struktúráról szól, ami tehát nem is gyűrű. (4 pont)