Bevezetés a számításelméletbe II. keresztfélév

1. pótZH javítókulcs

Az eredményeket legyetek szívesek emailben elküldeni, hogy kitölthessem a kartonokat. Természetesen az útmutatóban szereplőtől eltérő, ám helyes megoldásért teljes pontszám, hiányos megoldásért arányos részpontszám jár.

1. Mutassuk meg, hogy van olyan egyszerű G gráf, melynek van Euler-útja, de bárhogyan is húzunk be G-be egy új élt G két összekötetlen pontja közé, a keletkező gráfnak sosem lesz Euler útja!

   Ha olyan élt húzunk be, mely ptn fokú pontból indul, akkor a behúzott él az eredeti Euler út után csatolható,(3 pont)
   azaz a kibővített gráfnak is lesz Euler útja (1 pont)
   Mivel ez nem lehetséges, ezért G mindkét páratlan fokú pontja össze van kötve G összes többi csúcsával. (1 pont)
   Tehát minden összefüggő gráf, melynek két ptn fokú csúcsa van és azok teljes fokúak, megfelel a feladat követelményeinek. (4 pont)
   Ilyen gráf létezik, pl ha K_4 egy élét elhagyjuk, az jó. (1 pont)
   Az is teljes értékű megoldás, ha megmutatjuk, hogy K_4-nek van Euler útja, de "bárhogy is húzzuk be" a kimaradó élt, a kapott K_4-nek nincs Euler útja, hisz 4 ptn fokú csúcsa van.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha a 100-pontú, páros G gráf élei 47-színezhetőek, akkor a G gráf $\overline{G}$ komplementerének van két éldiszjunkt Hamilton-köre!

   Mivel G páros, ezért Kőnig tétele miatt $\Delta(G) = \chi'(G) \leq 47$, (3 pont)
   ezért $\delta(\overline{G}) = 100 - 1 - \Delta(G) \geq 99 - 47 = 52$ (δ a minimális fokszámot jelöli). (3 pont)
   Dirac tétele miatt létezik tehát G-ben egy C Hamilton kör. (2 pont)
   A $\overline{G} - C$ gráfban minden fokszám legalább $52 - 2 = 50$, (1 pont)
   ezért Dirac tétele szerint létezik egy további, C-től diszjunkt Hamilton kör a $\overline{G}$ komplementergráfban. (1 pont)

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (A, B; E)$ páros gráfban $|N(X)| \geq |X| + 1$ áll tetszőleges $X \subseteq A$ ponthalmazra, akkor G-nek van A-t fedő párosítása, de nincs olyan él E-ben, mely G minden A-t fedő párosításban benne van!

   Mivel $|N(X)| \geq |X| + 1 > |X| \quad \forall X \subseteq A$, ezért Frobenius tétele szerint létezik A-t fedő párosítás. (2 pont)
   Az állítás második részéhez elegendő azt igazolni, hogy tetszőleges e él elhagyása után a $G - e$ gráfban létezik A-t fedő párosítás. (2 pont)
   De ha $X \subseteq A$, akkor $|N_{G-e}(X)| \geq N(X) - 1 \geq |X| + 1 - 1 = |X|$ (2 pont)
   tehát a Frobenius feltétel fennáll a $G - e$ gráfra, (2 pont)
   ezért a Frobenius tétel szerint valóban létezik $G - e$-ben A-t fedő párosítás. (2 pont)

4. Mutassuk meg, hogy ha a véges, egyszerű G gráfnak 1000 éle van, és G bármely pontjának fokszáma legfeljebb 38, akkor $\nu(G) \geq 26$, azaz G-nek van legalább 26 élt tartalmazó párosítása!

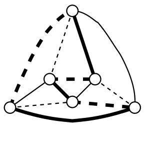
   Vizing tétele miatt $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq 38 + 1 = 39$, azaz G élei 39-színezhetőek. (3 pont)
   G tetszőleges élszínezésének minden színosztály egy párosítás, (3 pont)
   ezért a skatulya-elv miatt a 39-élszínezés legnagyobb színosztálya legalább $\frac{1000}{39} > \frac{1000}{40} = 25$ élt tartalmaz, vagyis egy legalább 26-élű párosítás. (4 pont)

5. Igazoljuk, hogy ha a G gráf $L(G)$ élgráfja páros gráf, akkor G is páros gráf!

   Ha $L(G)$ páros, akkor $2 \geq \chi(L(G) = \chi'(G) \geq \Delta(G)$, azaz G bármely fokszáma legfeljebb 2. (3 pont)
   Ezért G minden komponense út vagy kör. (2 pont)
   Minden útkomponens 2-színezhető, tehát páros. (1 pont)
   Bármely körkomponens élgráfja egyrészt páros, másrészt izomorf az adott körkomponenssel. (2 pont)
   Tehát minden körkomponens is páros gráf. (1 pont)
   Vagyis G minden komponense páros gráf, ezért G is az. (1 pont)

6. Mennyi $\chi'(L(K_4))$, azaz a 4-pontú teljes gráf élgráfjának élkromatikus száma?

   K_4-nek $\binom{4}{2} = 6$ éle van, így $G := L(K_4)$ 6-csúcsú. G két csúcsa akkor nincs összekötve, ha a megfelelő élek K_4-ben diszjunktak, azaz K_4 egy teljes párosítását alkotják. Eszerint G nem más, mint a K_6-ból egy teljes párosítás elhagyásával keletkező gráf, ami egyébként az oktaéder élhálója. (a lerajzolásért is jár a 4 pont)
   Mivel G 4-reguláris, ezért $\chi'(G) \geq 4$ (2 pont)
   G éleit 4 diszjunkt teljes párosításba lefedi, ezért $\chi'(G) \leq 4$ (a színezésért is jár a 2 pont)
   A két becslést összevetve $\chi'(L(K_4)) = 4$ adódik. (2 pont)

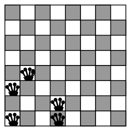
   

7. Bizonyítsuk be, hogy minden síkbarajzolható gráf két páros gráf uniója!

   Minden síkbarajzolható gráf 4-színezhető a tanultak szerint. (3 pont)
   Legyen G síkbarajzolható, és legyenek V_1, V_2, V_3 és V_4 a színosztályai. (2 pont)
   Legyen $V(G_1) := V(G)$, és legyenek a G_1 gráf élei a G gráf azon élei, melyek V_1 és V_2 között, vagy V_2 és V_3 között, vagy V_3 és V_4 között, vagy V_4 és V_1 között futnak. (1 pont)
   G_1 páros gráf, hiszen minden éle $V_1 \cup V_3$ és $V_2 \cup V_4$ között fut. (1 pont)
   A G-vel azonos csúcshalmazú G_2 gráfot G azon élek alkossák, melyek V_1 és V_3 között vagy V_2 és V_4 között futnak.
   Mivel G_2 minden éle $V_1 \cup V_2$-t köti össze $V_3 \cup V_4$-gyel, ezért G_2 is páros gráf. (2 pont)
   A konstrukció miatt G minden éle vagy G_1-nek, vagy G_2-nek éle, ezért $G = G_1 \cup G_2$, ahogy a feladat kérte. (1 pont)

8. Legyenek a G gráf csúcsai a 8×8-as sakktábla mezői, és az u és v csúcsok akkor legyenek összekötve, ha az u-nak megfelelő (m_u) mezőről a vezér (alias királynő) egy lépésben a v-nek megfelelő (m_v) mezőre léphet, azaz m_u és m_v egy sorban vagy egy oszlopban vannak, vagy m_u és m_v "átlósan" helyezkednek el, ami azt jelenti, hogy a két mező x koordinátáinak különbsége megegyezik az y koordináták különbségével. Bizonyítsuk be, hogy G nem perfekt gráf!

Elegendő G-ben egy feszített, páratlan kört mutatni, (2 pont)
hisz a páratlan kör nem perfekt gráf, és perfekt gráf minden feszített részgráfja perfekt. (2 pont)
5 vezér elhelyezhető úgy, hogy az általuk meghatározott mezők C_5 részgráfot feszítsenek: (5 pont)



tehát G valóban nem perfekt. (1 pont)

Ha a olyan mezőket talál a versenyző, melyek nem *feszítik* az általuk meghatározott ptn kört, akkor a jó irányba tett próbálkozás értékelhető, értelemszerűen max. 5 ponttal.