Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

3. ZH javítókulcs (2017. 05. 09.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ 100 pontú irányítatlan gráf minden élét a piros, fehér ill. zöld színek valamelyikére színeztük ki úgy, hogy a piros, a fehér és zöld élek is a G egy-egy feszítőfáját alkotják. Jelölje $\mathcal{M}_G$ a G körmatroidját, és legyen $\mathcal{M} := \mathcal{M}_G \vee \mathcal{M}_G$. Mennyi az $\mathcal{M}, \mathcal{M}_G$ és $\mathcal{M}_G^*$ matroidok rangja és mekkora az $\mathcal{M}$ és $\mathcal{M}_G^*$ matroidok legnagyobb közös független halmazának mérete?

   A 100 pontú G gráf minden feszítőfájának 99 éle van, ezért a piros, fehér és zöld élek mindegyikéből ennyi van, azaz az $\mathcal{M}_G$ matroid elemeinek száma $3 \cdot 99 = 297$. Mivel minden feszítőfa az $\mathcal{M}_G$ bázisa, ezért M_G rangja $r_{M_G}(E) = 99$. (2 pont)
   Definíció szerint a duális matroid bázisa az eredeti matroid bázisának komplementere, ezért $\mathcal{M}_G^*$ rangja $r_{\mathcal{M}_G^*}(E) = 297 - 99 - 198$. (2 pont)
   Tekintettel arra, hogy (pl) a piros és fehér élek két éldiszjunkt feszítőfát alkotnak G-ben, ezért az $\mathcal{M}$ matroidban ezen élek független halmazt határoznak meg, és (mivel $\mathcal{M}_G$ két bázisának uniójáról beszélünk), ennél nincs is nagyobb független halmaza $\mathcal{M}$-ben. Így $\mathcal{M}$ rangja $r_{\mathcal{M}}(E) = 2 \cdot 99 = 198$. (2 pont)
   Vegyük észre, hogy G piros és fehér élei alkotta B halmaz nem csak $\mathcal{M}$-ben független (konkrétan bázis), hanem az $\mathcal{M}^*$ matroidnak is egy bázisát alkotja, hiszen éppen a zöld élek alkotta feszítőfa éleinek komplementeréről van szó. (2 pont)
   Mivel ez a B halmaz mindkét matroidnak bázisa, ezért ennél nagyobb közös független nem létezik, vagyis a közös független maximális mérete pontosan $|B| = 2 \cdot 99 = 198$. (2 pont)

2. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő gráf, melynek 21 blokkja és 11 elvágó pontja van. Igazoljuk, hogy 10 él behúzásával elérhető, hogy G 2-szeresen (pont)összefüggő legyen.

   Az órán tanultak szerint egy összefüggő gráf 2-összefüggővé tételhez szükséges élek minimális száma $\max(b(G) - 1, \left\lceil \frac{m(G)}{2} \right\rceil)$, ahol $b(G)$ jelöli egy elvágó pont elhagyása után keletkező új komponensek maximális számát, míg $m(G) = m'(G) + m''(G)$, ahol $m'(G)$ levélblokkok, $m''(G)$ pedig az izolált blokkok száma. (3 pont)
   Azt kell tehát igazolnunk, hogy $m(G) \leq 20$ és $b(G) \leq 11$ egyaránt teljesül. (1 pont)
   Világos, hogy $m''(G) = 0$, hisz G összefüggő. (1 pont)
   Mivel G összefüggő és 1-nél több elvágó pontja van, ezért G-nek olyan blokkja is van, ami G-nek 1-nél több elvágó pontját tartalmazza. Ez utóbbi blokk bizonyosan nem levélblokk, tehát $m(G) \leq 20$. (2 pont)
   Ha most $b(G) \geq 12$ lenne, akkor volna egy olyan v elvágó pontnak megfelelő csúcs a $T_2(G)$ fában, aminek legalább 12 blokk-szomszédja van. Ha most v-t választjuk a $T_2(G)$ gyökerének és $T_2(G)$ minden élét e gyökér felé irányítjuk, akkor egyrészt minden blokk-csúcsból pontosan egy él indul ki $T_2(G)$-ben, továbbá $T_2(G)$ minden v-től különböző elvágó pontnak megfelelő csúcsába pontosan egy él lép be, amelyik blokknak-csúcsból indul. Ezek szerint a fennmaradó 10 elvágó pont mindegyikébe belép egy-egy, a 12 blokktól különböző csúcsból induló él, vagyis még legalább 10 blokk van a 12-n kívül. Ez ellentmondás, ami azt igazolja, hogy $b(G) \geq 12$ nem állhat. (3 pont)

   Legyen $\mathcal{M}_G$ a G körmatroidja, és $\mathcal{M}$ pedig az a partíciós matroid E-n, amit az azonos színű élek határoznak meg: $\mathcal{M}$-ben tehát egy élhalmaz pontosan akkor a független ha nem tartalmaz két azonos

színű élt. (2 pont)
A G feszítőfái pontosan az $\mathcal{M}_G$ matroid $|V|-1$ elemű független halmazainak felelnek meg, (2 pont) így a keresett tarka feszítőfa pontosan akkor létezik, ha $\mathcal{M}_G$-nek és $\mathcal{M}$-nek van egy $|V|-1$ méretű közös független halmaza. (2 pont)
A matroid metszet tétel szerint az $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ és $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ matroidokban a közös független maximális elemszámára $\max\{|F| : F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\} = \min\{r_1(X) + r_2(E \setminus X) : X \subseteq E\}$ igaz, (2 pont) ezért a keresett tarka fa pontosan akkor létezik, ha $|V| - 1 \leq \min\{r_{\mathcal{M}_G}(X) + r_{\mathcal{M}}(X) : X \subseteq E\}$, ahol $r_{\mathcal{M}_G}(X)$ az X élhalmazból kiválasztható maximális körmentes részhalmaz mérete, míg $r_{\mathcal{M}}(E \setminus X)$ az X élhalmazba nem tartozó éleken előforduló színek számat jelenti. (2 pont)

---

3. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével határozzuk meg a G (nem feltétlenül egyszerű) gráf élösszefüggőségét, akkor a max-vissza sorrendben utolsó csúcsok fokszámai rendre az alábbiak: $7, 9, 6, 4, 7, 5, 4, 8, 4, 7, 9$. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t. Igaz-e, hogy G-nek bizonyosan van olyan legfeljebb 4 elemű X ponthalmaza, hogy X és a komplementere között futó élek száma megegyezik $\lambda(G)$-vel?

   Az órán tanultak szerint $\lambda(G)$ megegyezik a Nagamochi-Ibaraki algoritmus során a maxvissza sorrendbeli utolsó csúcsok fokszámai közül a legkisebbikkel. (2 pont)
   Ez a konkrét esetben $\lambda(G) = 4$-nek adódik. (1 pont)
   Olyat is tanítottak, hogy $\lambda(v_{n-1}, v_n) = d(v_n)$, azaz a maxvissza sorrend utolsó két pontját elválasztó vágások között minimális számú élt tartalmaz az a vágás, amelynek egyik oldalán a maxvissza sorrendbeli utolsó csúcs áll. (2 pont)
   Mivel minden egyes maxvisszasorrend-számítás után a sorrend két utolsó pontját összeolvasztjuk, ezért amikorra a negyedik maxvissza sorrendben az utolsó csúcs foka 4 lett, addig összesen 3 összeolvasztást hajtottunk végre. Ezért a negyedik maxvissza sorrend utolsó csúcsa által reprezentált X ponthalmaz G-nek legfeljebb 4 pontját tartalmazhatja. (3 pont)
   Mivel ez az X a G egy minimális vágását határozza meg, ezért a második kérdésre igenlő a válasz: van olyan legfeljebb 4 elemű ponthalmaza G-nek, ami G minimális vágását indukálja. (2 pont)

A 3.pZH pontos helyszíne a tárgy honlapjáról fog kiderülni legkésőbb néhány nappal a dolgozatírás előtt.