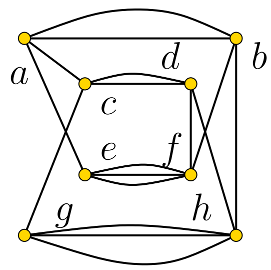
Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

2. ZH javítókulcs (2023. 05. 18.)

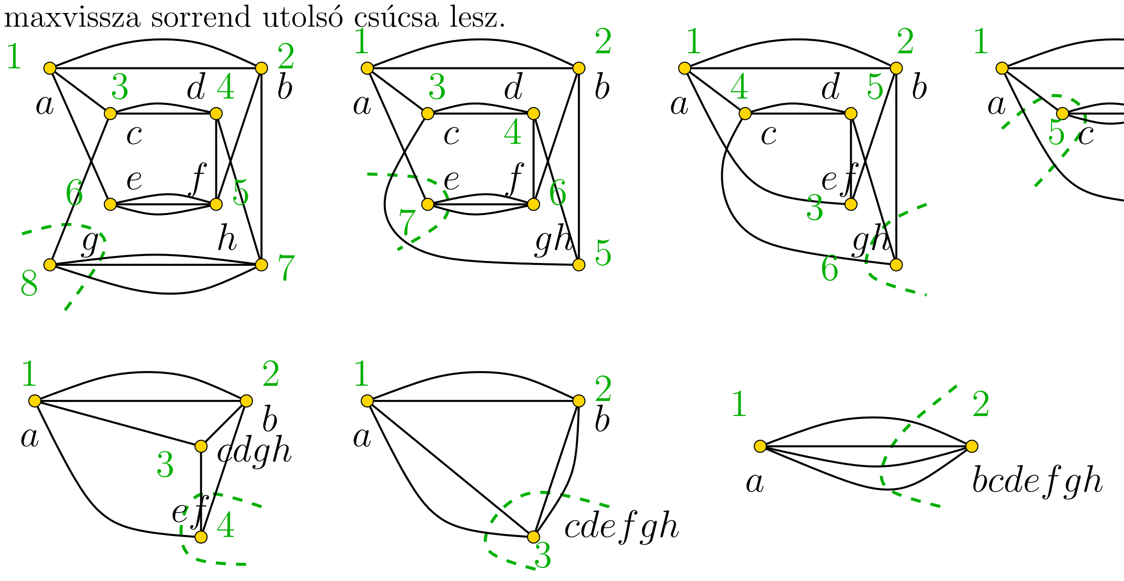
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.



1. Határozzuk meg a Nagamochi-Ibaraki-algoritmus segítségével az ábrán látható G gráf egy minimális vágását. Ha egy lépés során több csúcsból is lehet választani, mindig az ABC szerint legelsőt válasszuk.

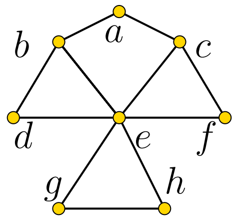
   Kiszínezhető-e G minden éle a piros vagy a zöld színek valamelyikére úgy, hogy G minden csúcsából induljon piros és zöld él is, továbbá a piros élek gráfjának fülfelbontása, a zöld élekének pedig erősen összefüggő irányítása legyen?
   (Nagyon figyelmesen futtassuk az algoritmust, mert igen könnyű hibázni.) (15 pont)

   Az algoritmus minden fázisában egy maxvissza sorrendet keresünk a feladatbeli lexikografikus feltétel figyelembe vételével, majd az utolsó csúcsot összeolvasztjuk az utolsó előttivel. Az adott fázis vágásjelöltje a maxvissza sorrend utolsó csúcsa lesz. (3 pont)



   Az algoritmus konkrét végrehajtása az ábrán látható. A zöld számok a maxvissza sorrendet, a zöld szaggatott vonalak a vágásjelölteket mutatják. (3 pont)
   Ezek szerint G egy minimális vágását a legkevesebb élt elvágó vágásjelöltből kapjuk, ami a konkrét esetben 3 élű. Így pl a g, h és a maradék csúcsok között futó 3 él minimális vágást alkot G-ben. (3 pont)
   Egy gráfnak pontosan akkor van fülfelbontása, ha 2-szersen élösszefüggő, (1 pont)
   És pontosan ugyanekkor van erősen összefüggő irányítása is (1 pont)
   Ezért a piros és a zöld éleknek is 2-élöf gráfot kell alkotniuk G ponthalmazán, (1 pont)
   ami azt jelenti, hogy minden vágásnak legalább két piros és két zöld élt kell tartalmaznia. (2 pont)
   Láttuk, hogy G három alkalmas él elhagyásától szétesik, ezért nem adható meg az élek előírt tulajdonságú színezése. (1 pont)

2. Legkevesebb hány élt kell elhagyni a jobb oldali ábrán látható G gráfból ahhoz, hogy a kapott gráfnak legalább 5 maxblokkja legyen? (10 pont)



Ha G-ből egy a csúcsra illeszkedő élt hagyunk el, akkor 4 maxblokk keletkezik: három K_3 és egy K_2. (3 pont)
Ha bármely más élt hagyunk el, akkor legfeljebb három maxblokk keletkezik: a be vagy ce elhagyása esetén egy K_3 és a maradék, d-re vagy f-re illeszkedő él elhagyásakor egy K_2, egy K_3 és a maradék, egy g-re vagy h-ra illeszkedő él törlésekor pedig egy K_2 és a maradék. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy egyetlen él elhagyásával nem képezhető 5 maxblokk, így legalább két él elhagyására van ehhez szükség. (1 pont)
Ha elhagyjuk G-ből az ab és be éleket, akkor pontosan 5 maxblokk keletkezik: három K_2 és két K_3. (3 pont)
Ezért a feladat kérdésére kettő a válasz. (1 pont)

---

3. A $H = \{a, b, c, d, e\}$ alaphalmazt szeretnénk minél olcsóbban lefedni. A fedéshez az alábbi részhalmazokat használhatjuk, minden részhalmaz után a költsége áll: $\{a\}, 2$; $\{a, b\}, 4$; $\{a, d\}, 4$; $\{a, c, e\}, 3$; $\{b, c, e\}, 4$; $\{c, d\}, 6$; $\{b, d\}, 7$.

Állapítsuk meg, hogy a mohó algoritmus milyen költséggel tudja lefedni a H halmazt. Lehetséges-e valamelyik részhalmaz költségét úgy megnövelni, hogy a mohó algoritmus olcsóbb fedést szolgáltasson? (12 pont)

A mohó algoritmus szerint mindig azt a halmazt kell következőnek választani, amelyik fajlagosan a legolcsóbban fed korábban fedetlen elemeket. (2 pont)
Az elsőnek választott halmaz ezért $\{a, c, e\}$ lesz. (1 pont)
A második pedig $\{b, d\}$. (2 pont)
Az így kapott fedés költsége 10. (1 pont)
Ha az $\{a, c, e\}$ halmaz költségét 42-re növeljük, (2 pont)
akkor a mohó algoritmus a $\{b, c, e\}$ halmazzal kezdi a fedést, majd az $\{a, d\}$ halmazt választja, (2 pont)
így 8 költséggel fedi H-t. (1 pont)
Mivel $8 < 10$, ezért a feladatban feltett második kérdésre igenlő a válasz. (1 pont)

---

4. Határozzuk meg, hogy a $11, 12, 42, 3, 6, 7$ megmunkálási időkkel megadott munkák két gépre történő ütemezése esetén mennyi az átfutási idő minimuma. Hogyan kell minimális átfutási idő mellett úgy ütemezni, hogy a munkák átlagos befejezési ideje a lehető legkisebb legyen? (13 pont)

A 42 megmunkálási idejú munka miatt egyetlen ütemezés átfutási ideje sem lehet 42-nél kevesebb. (2 pont)
Ha a 42 megmunkálási idejű munkát az egyik, az összes többi munkát pedig a másik gépre ütemezzük, akkor az így kapott bármely ütemezés átfutási ideje 42 lesz, (3 pont)
tehát a kérdezett minimális átfutási idő pontosan 42. (1 pont)
Ha minimális átfutási idő mellett a minimális átlagos befejezési időt szeretnénk elérni, akkor ehhez a „másik" gépen végzett kis munkák sorrendjét kell alkalmas módon megválasztani, (2 pont)
mégpedig úgy az ezen gépen elvégzett munkák átlagos befejezési ideje a lehető legkisebb legyen. (2 pont)
Az órán azt tanították, hogy egy gépre történő ütemezés esetén a legkisebb átlagos befejezési idő az SPT sorrend alkalmazásával érhető el. (2 pont)
A második kérdésre tehát az a válasz, hogy a 42 megmunkálási idejű munkát az egyik gépre ütemezzük, a másikra pedig a többi munkát, mégpedig $3, 6, 7, 11, 12$ sorrendben. (1 pont)