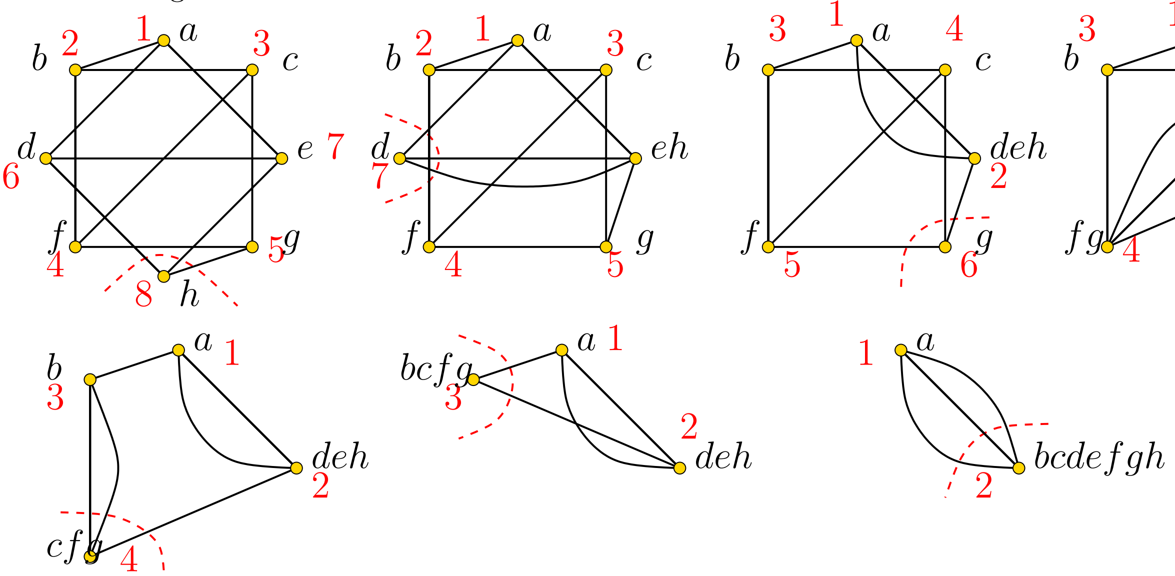
Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

2. ZH javítókulcs (2020. 05. 15.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

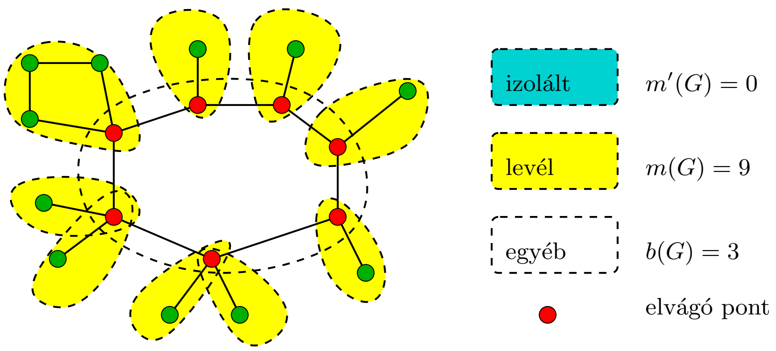
1. Határozzuk meg az ábrán látható gráf egy minimális vágását a Nagamochi-Ibaraki-algoritmus segítségével úgy, hogy amikor egy lépés során több csúcsból is lehet választani, mindig azt választjuk, amelyik ABC rendben a legelső lehet.



Az algoritmus minden fázisában egy maxvissza sorrendet keresünk a feladatbeli névsormegkötéssel, majd az utolsó csúcsot összeolvasztjuk az utolsó előttivel. Az adott fázis vágásjelöltje a maxvissza sorrend utolsó csúcsa lesz. (3 pont)
Az algoritmus konkrét végrehajtása az ábrán látható. A piros számok a maxvissza sorrendet, a szaggatott vonal a vágásjelöltet mutatják. (6 pont)
Ezek szerint G egy minimális vágását a legkevesebb élt elvágó vágásjelöltből kapjuk, ami a konkrét esetben a $\{b, c, f, g\}$ ill. az $\{a, d, e, h\}$ csúcsok között futó két élből áll. (1 pont)

2. Van-e olyan összefüggő gráf, aminek 7 elvágó pontja és 10 maxblokkja van, de mégsem tehető 2-szeresen pontösszefüggővé 4 él behúzásával? Ha van, akkor mutassunk ilyen gráfot és igazoljuk e tulajdonságát, ha nincs, akkor bizonyítsuk be, hogy minden ilyen gráf 2-szeresen összefüggővé tehető legfeljebb 4 él hozzávételével.

Van ilyen gráf, az ábrán adtunk meg egyet. (5 pont)



Az órán tanultak szerint a 2-összefüggőség eléréséhez szükséges élek minimális száma $\max\left(b(G) - 1, \left\lceil \frac{m(G)+m'(G)}{2} \right\rceil\right)$ (2 pont)
A konkrét gráfon $b(G) = 3$ az ugyanazon elvágó pontra illeszkedő maxblokkok száma, $m(G) = 9$ a levélblokkok száma és $m'(G) = 0$ az izolált blokkok száma, (2 pont)
így a formulában a maxium a $\lceil \frac{9}{2} \rceil = 5$ mennyiségen vétetik fel. Ezért a megadott gráf 4 élbehúzásával nem tehető 2-összefüggővé. (1 pont)

3. Tegyük fel, hogy a G gráfnak $v_1, v_2, \ldots, x, y$ és $u_1, u_2, \ldots, y, x$ is egy maxvissza sorrendje. Bizonyítsuk be, hogy $d(x) = d(y)$, azaz ha a maxvissza sorrend $\ldots, x, y$-ra és $\ldots, y, x$-re is tud végződni, akkor a két utolsó csúcs fokszáma megegyezik.

   Az órán azt tanultuk, hogy ha a maxvissza sorrend $\ldots, u, v$-re végződik, akkor $d(v) = \lambda(v, u)$ teljesül. (5 pont)
   Ezek szerint az $\ldots, x, y$ végződés miatt $d(y) = \lambda(y, x)$, az $\ldots, y, x$ végződés miatt $d(x) = \lambda(x, y)$ (3 pont)
   Mivel irányítatlan gráfban két csúcs között az élösszefüggőség mindkét irányból ugyanakkora, ezért $\lambda(x, y) = \lambda(y, x)$, ahonnan $d(x) = d(y)$ következik. (2 pont)

---

4. Hat munka ütemezését kell elvégeznünk, az egyes megmunkálási idők $1, 2, 3, 4, 5$ és 6. Mennyi lesz az átlagos átfutási idő minimuma ha egy gépre ütemezünk? Mennyi lesz az átlagos átfutási idő akkor, ha LPT sorrendben listás ütemezéssel dolgozunk két gépen?

   Az órán tanultak szerint egy gép esetén az SPT sorrend adja a minimális átlagos átfutási időt, azaz, ha a munkákat $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sorrendben végezzük el. (3 pont)
   Ekkor az egyes munkák átfutási ideje $1, 3, 6, 10, 15$ és 21 lesz, ezek átlaga pedig $\frac{56}{6} = \frac{28}{3}$. (2 pont)
   Ha LPT sorrednben dolgozunk két gépen, akkor a 6 ill. 5 megmunkálási idejű munkákkal kezdünk a két gépen, $t = 5$-nél az 5-ös munka végeztével elkezdjük a 4-es munkát, majd $t = 6$-ban elkezdjük a 3-ast. Mindkét utóbbi munka $t = 9$-ben ér véget, ekkor kezdjük a 2-es ill. 1-es munkákat, amelyek $t = 10$-ben ill. $t = 11$-ben érnek véget. (3 pont)
   Az egyes átfutási idők $5, 6, 9, 9, 10$ és 11 lesznek, ezek átlaga pedig az átlagos átfutási idő, konkrétan $\frac{50}{6} = \frac{25}{3}$. (2 pont)

---

5. Előfordulhat-e, hogy ugyanazokat a tárgyakat az FF algoritmus másfélszer annyi ládába pakolja, mint az FFD algoritmus?

   Igen, előfordulhat. Legyenek pl. a tárgyak méretei $0,6$; $0,6$; $0,4$; $0,4$. (5 pont)
   Ezeket az FFD algoritjus két ládába pakolja, mindegyikbe egy nagyot, egy kicsit. (2 pont)
   Ha azonban az FF algoritmust használjuk, és növekvő méret szerint pakolunk, akkor a két kis tárgy elfoglalja az első ládát, és a nagyoknak egy-egy újat kell nyitni. Összesen tehát 3 ládára van szükség, ami 2-nek épp a másfélszerese. (3 pont)