Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

2. ZH javítókulcs (2017. 03. 04.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Nagy az izgalom az egyetemen: n hallgatónak (konkrétan $h_1, h_2, \dots, h_n$-nek) fel kell iratkoznia a $k_1, k_2 \dots, k_m$ kurzusok közül néhányra. Minden kurzusnak van egy létszámkorlátja (a k_i-é $l(i)$), és minden hallgatónak legalább adott számú kurzust kell felvennie, konkrétan h_j-nek legalább $m(j)$-t. Ha egy h_j hallgató felvesz egy k_i kurzust, akkor annak a költsége $p(i,j)$, amit a h_j hallgatónak kell állnia. Írjunk fel egy olyan ILP feladatot, amelynek optimális megoldása egy olyan kurzusbeosztás lesz, amely teljesíti a fenti kritériumokat (már persze amennyiben ilyen létezik) és emellett a hallgatók által kifizetett összköltség minimális.

   Igaz-e, hogy ha elhagyjuk az egészértékűségi kikötéseket és ily módon relaxált LP feladat megoldható, akkor az optimális megoldások között bizonyosan lesz egészértékű is?

   (Az eredeti kitűzésben egy h_j helyett h_i szerepelt, de ez a dolgozatírás során helyesbítve lett.)

   Készítsünk el egy G páros gráfot, melynek csúcsai a hallgatók ill. a kurzusok, az élek pedig a lehetséges kurzusfelvételeket jelentik. Minden $e = k_i h_j$ élhez adott a $p(i,j)$ költség, valamint tartozik hozzá egy $x(i,j)$ változó, melynek értéke attól függően lesz 1 ill. 0, hogy az él által reprezentált kurzusfelvétel megvalósul-e a keresett megoldásban. Ugyanezen e élhez tartozik egy $p(i,j)$ szám is, ami a felvétel költségét jelenti. (2 pont)
   A feladatban szereplő feltételek az alábbi ILP problémát határozzák meg:

$$\max \sum_{i,j} p(i,j) \cdot x(i,j) \qquad \text{ha } \mathbf{0} \leq x \in \mathbb{R}^{E(G)}$$

$$x(e) \in \mathbb{Z} \qquad \forall e \in E(G)$$

$$x(e) \leq 1 \qquad \forall e \in E(G)$$

$$\sum_j x(ij) \leq l(i) \qquad \text{minden } k_i \text{ kurzusra}$$

$$\sum_i x(ij) \geq m(j) \qquad \text{minden } h_j \text{ hallgatóra}$$

   (3 pont)
   Az fenti ILP-ben az együtthatómátrix egy egységmátrixból és a G páros gráf B_G incidenciamátrixából áll. (1 pont)
   Az órán tanultuk, hogy páros gráf incidenciamátrixa TU tulajdonságú, továbbá, hogy egy TU mátrixot egyetlen egyes kivételével nullákat tartalmzó sorokkal kiegészitve TU mátrixot kapunk. (1 pont)
   A TU mátrixokról tanultak szerint a kérdezett LP feladatnak bármely c célfüggvényhez tartozó optimális megoldásai között van olyan, melynek minden koordinátája egész, (2 pont)
   ezért a feladat kérdésere igenlő a válasz: ha az LP feladat megoldható, akkor az optimális megoldások között van egész megoldás is. (1 pont)

---

2. Alkossák az $\mathcal{F}$ halmazrendszert az $E = \{1, 2, \dots, 10\}$ alaphalmaz mindazon F részhalmazai, amelyekre egyrészt $|F \cap \{1,2,3,4,5\}| \leq 3$ másrészt pedig $|F| \leq 6$ teljesül. Matroidot alkot-e az $(E, \mathcal{F})$ pár?

   Ellenőrizni kell az $\mathcal{F}$ rendszerre a függetlenségi axiomák teljesülését. (1 pont)
   Az (F1) axioma teljesül, hisz $|\emptyset| = 0 \leq 6$ és $|\emptyset \cap \{1,2,3,4,5\}| = 0 \leq 3$. (2 pont)

Tegyük fel most, hogy $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$. Ekkor $|X| \le |Y| \le 6$ és $|X \cap \{1,2,3,4,5\}| \le |Y \cap \{1,2,3,4,5\}| \le 3$ miatt (F2) is igaz $\mathcal{F}$-re. (2 pont)

(F3) ellenőrséséhez tegyük fel, hogy $X, Y \in \mathcal{F}$ és $|X| < |Y|$. Ha $|X \cap \{1,2,3,4,5\}| < |Y \cap \{1,2,3,4,5\}|$, akkor van olyan $y \in Y \cap \{1,2,3,4,5\}$, amire $y \notin X$. Ekkor $X + y \in \mathcal{F}$. Ha pedig $|X \cap \{1,2,3,4,5\}| \ge |Y \cap \{1,2,3,4,5\}|$, akkor $|X \cap \{6,7,8,9,10\}| < |Y \cap \{6,7,8,9,10\}|$, így van olyan $y \in Y \cap \{6,7,8,9,10\}$, amire $y \notin X$. Ebben az esetben is $X + y \in \mathcal{F}$, tehát (F3) mindenképpen teljesül. (4 pont)

Azt kaptuk, hogy $\mathcal{F}$-re teljesül mindhárom függetlenségi axioma, tehát $(E, \mathcal{F})$ matroid. (1 pont)

---

3. Mennyi annak az matroidnak a rangja, amit úgy kapunk, hogy dualizáljuk a jobb oldalon látható mátrixmatroid 4-edik elemének törölésével keletkező matroidot?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 5 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

A törléssel keletkező matroid is mátrixmatroid lesz, a hozzá tartozó mátrixot pedig a megfelelő oszlop törlésével kapjuk. (1 pont)

Az így keletkező matroid rangja a törlés után kapott mátrix rangja lesz. (2 pont)

Mivel a duális bázisa az eredeti matroid bázisának komplementere, ezért a duális matroid rangja az eredeti matroid rangját egészíti ki az alaphalmaz méretére, jelen esetben 6-ra. (3 pont)

A 4-dik oszlop törlésével keletkező mátrix rangját kell tehát meghatároznunk, amit Gauss-eliminációval végzünk el: (1 pont)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & -1 & 10 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(2 pont)

A törlés után kapott mátrix rangja a vezéregyesek száma (3), így ennyi a törlés utáni matroid rangja is. A duális rangja pedig $6 - 3 = 3$-nak adódik. (1 pont)

Az utóbbi pont ill. a fenti 3 pontos indoklás kiváltható az alábbival.

A vezéregyesek oszlopai (tehát az 1., 2. és (eredetileg) 5. oszlop a törlés utáni matroid bázisát alkotják, ezek szerint az eredeti mátrix 3., 6. és 7. oszlopai alkotják a törlés utáni matroid duálisának egy bázisát. A duális matroid rangja tehát 3. (4 pont)