Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

1. ZH javítókulcs (2019. 03. 26.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Az alábbi táblázat A, B, C és D sorai ill. $1, 2, 3$ és 4 oszlopai alkotják a G páros gráf csúcshalmazát, a táblázatbeli számok pedig az adott sor és oszlop között futó él súlyát jelentik. Határozzuk meg az órán tanult módszerrel G egy maximális súlyú M párosítását, és igazoljuk egyúttal, hogy nincs G-ben M-nél nagyobb súlyú párosítás.

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	2	6	3
B	7	5	9	8
C	5	2	7	3
D	7	3	9	5

Az órán tanult Egerváry algoritmus segítségével keresünk teljes párosítást: kiindulunk az oszlopmaximumokhoz ill a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken maximális párosítást keresünk. Ha ez nem teljes, akkor a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhető oszlopokon csökkentünk, a sorokon pedig növeljük a lefogást az alábbiak szerint, addig, amíg lesz a pontos élekből teljes párosítás. (2 pont)

	5	2	7	5	
	5	3	7	6	
	7	5	9	8	
	1	**2**	**3**	**4**	
A	2	$\boxed{2}$	6	3	0 0 0
B	7	5	9	$\boxed{8}$	0 2 3
C	$\boxed{5}$	2	7	3	0 0 0
D	7	3	$\boxed{9}$	5	0 2 2

A kiindulási súlyozott lefogás az $1, 2, 3$ és 4 csúcsokon a megfelelő oszlopmaximum, azaz $7, 5, 9$ és 8, a többi csúcson 0. (2 pont)
Az ábrán az algoritmust követve kapott súlyozott lefogások, bekeretezve pedig egy pontos élekből álló teljes párosítás elemei láthatók. (3 pont)
Egy 24 súlyú párosítást és egy 24 összsúlyú lefogást kaptunk. Utóbbi miatt nem létezik 24-nél nagyobb összsúlyú súlyozott lefogás, azaz a kapott párosítás csakugyan maximális súlyú. (2 pont)
Ezért az $A2, B4, C1, D3$ élek egy maximális súlyú teljes párosítást alkotnak G-ben. (1 pont)

---

2. Állapítsuk meg, hogy van-e valós megoldása az itt látható egyenlőtlenségrendszernek. Ha van megoldás, akkor találjunk egy olyan megoldást, amelyben az x_3 változó értéke a lehető legkisebb.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\ge -3 \\ 2x_2 + 3x_3 &\ge 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 5x_3 &\le -7 \end{aligned}$$

Felírjuk a lineáris egyenlőtlenségrendszert mátrixos alakban úgy, hogy az egyenlőtlenségek azonos irányba álljanak, azaz az első két egyenlőtlenséget -1-gyel megszorozzuk. (1 pont)
Végrehajtjuk a Fourier-Motzkin eliminációt, azaz a változókat egymás után elimináljuk úgy, a 0 együtthatós egyenlőtlenségeket megőrizzük, és az összes lehetséges pozitív-negatív együtthatópárra felírjuk azt az összeget, amiben az eliminálandó változó együtthatója 0-vá válik. (2 pont)

Konkrétan:
$$\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & -7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & -5 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -13 & -5 \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 7 \\ \hline \end{array}$$
(3 pont)

A $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \le 7$ egyenlőtlenség adódott, ezért van megoldás. (1 pont)
Megoldás találásához a változóknak x_3, x_2, x_1 sorrendben adunk értéket, az adott változó eliminációja előtti egyenlőtlenségek figyelembevételével. (1 pont)
Az x_3-ra $-x_3 \le 1$ és $3x_3 \le 4$ feltételek állnak, azaz $x_3 \ge -1$ miatt az x_3 minimális értéke $x_3 = -1$. (1 pont)

Ezzel a választással x_2-re $x_2 \leq 6$, $2x_2 \geq 5$ és $3x_2 \geq 18$ adódik, tehát például az $x_2 = 6$ megfelelő. Ekkor x_1-nek az $x_1 \leq 8$, $3x_1 \leq 24$ ill. $2x_1 \geq 16$ feltételeket kell teljesítenie, tehát $x_1 = 8$. (1 pont)

---

3. (a) Oldjuk meg az itt látható LP feladatot!

   (b) Meg lehet-e változtatni a célfüggvényt úgy, hogy az $x_1 = 180, x_2 = 80$ optimális megoldás legyen? Ha igen, akkor mutassunk példát ilyen célfüggvényre!

$$\max\{4x_1 + 5x_2\} \text{ ha}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1 \leq 180$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 600$$
$$2x_1 + x_2 \leq 400$$

Az (x_1, x_2) megoldásokat a síkon ábrázoljuk. Az egyes feltételeknek egy-egy félsík felel meg, a megoldások halmaza pedig e félsíkok metszete, egy konvex taromány lesz. Ezen a tartományon kell optimalizálnunk a célfüggvényt. (1 pont)
A nemnegativitási feltételek a pozitív síknegyedet adják, ebből vág le a három félsík egy konvex ötszöget. Ezen ötszöget határoló egyes egyenesek a 300 és 200, ill. a 200 és 400 pontokban metszik az egyes koordinátatengelyeket, valamint egy egyenes párhuzamos az x_2 tengellyel, az x_1 tengelyt pedig a 180-ban metszi. Egy ezt világosan mutató ábráért is jár a (2 pont)
A szóban forgó ötszög csúcsaira a $(0,0), (0,200), (150,100), (180,40)$ és a $(180,0)$ koordinátájú pontok adódnak, a harmadik és negyedik megtalálásához izzadságos számítás vezet. (2 pont)
Bármi is legyen a célfüggvény, az optimumát bizonyosan felveszi a fenti 5 pont valamelyikében, ezért csupán ezek közül kell kiválasztani azt, amelyik a maximalizál. (2 pont)
Ez pedig konkrétan az $x_1 = 150, x_2 = 100$ megoldáshoz tartozik, (1 pont)
az optimumérték pedig 1100. (0 pont)
Mivel a $(180, 80)$ pont az ötszögön kívül helyezkedik el (u.i. nem teljesíti az utolsó egyenlőtlenséget), ezért az nem megoldás, tehát egyetlen célfüggvényre sem lesz optimum. (2 pont)

Aki ebben a feladatban csupán a duális programot írja fel, az bár valójában nem jut lényegesen közelebb a megoldáshoz (hisz a duálist is optimalizálni kell, ráadásul 3 dimenzióban), mégis kap egy pontot.

---

4. Határozzuk meg azt a primál LP problémát aminek a duálisa itt látható.
(Nem tilos felrajzolni egy szamárvezetőt.)

$$\min\{7y_1 - 2y_3\} \text{ ha}$$
$$y_1, y_3 \geq 0$$
$$4y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 77$$
$$y_2 - 5y_3 = 9$$
$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 5$$

Teljesül az egyenlőtlenségek irányáról szóló ökölszabály (minimalizálás mellett nem lehet $\geq$ típusú egyenlőtlenség), ezért felírjuk a szamárvezetőként használt táblázatot. (1 pont)

	$x_1 \geq 0$	x_2	$x_3 \geq 0$	
$0 \leq y_1$	4	0	1	≤ 7
y_2	-2	1	1	$= 0$
$0 \leq y_3$	1	-5	1	≤ -2
	≥ 77	$= 9$	≥ 5	

(3 pont)
Mivel az első és a harmadik duális feltétel egyenlőtlenség, ezért x_1 és x_3 nemnegatív, (2 pont)
az előjelkötetlen y_2-höz egyenlőség tartozik a primál feladatban, a többi feltétel pedig (a maximalizálás miatt) $\leq$ típusú. (2 pont)
Ennek alapján a duális

$$\begin{aligned} \max\{77x_2 + 9x_2 + 5x_3\} \quad & \text{ha} \\ x_1, x_3 \quad & \geq 0 \\ 4x_1 + x_3 \quad & \leq 7 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \quad & = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \quad & \leq -2 \end{aligned}$$

(2 pont)

---

5. A piréz labdarúgó bajnokságban minden csapat minden másik csapattal egyszer játszik. Tegyük fel továbbá, hogy a bajnokság végeztével sikerült a csapatokat úgy jutalmazni, hogy ha az i csapat legyőzte a j csapatot, akkor az $p(i) - p(j)$ különbség $10^6 \cdot a(i,j)$ és $10^6 \cdot b(i,j)$ PP (piréz peták) közé essék, ahol $p(v)$ a v csapat jutalmát jelöli, valamint $a(i,j) \leq b(i,j)$ egész számok.

Igaz-e, hogy a jutalmazás megvalósítható ekkor úgy is, hogy a fenti feltételek továbbra is teljesüljenek, ám minden csapat egymillió PP többszörösét kapja, ráadásul a szétosztott jutalom összege ne növekedjék ettől?

(Célszerűnek látszik felírni egy, a feladathoz kapcsolódó LP problémát.)

Vezessünk be minden csapathoz egy-egy változót: az i csapathoz tartozzék az $x(i)$. Tekintsük azt a lineáris programozási feladatot, amelyben az $x(1)+x(2)+\ldots$ összeget kell maximalizálni, az alábbi feltételek mellett. Minden i-re teljesül, hogy egyrészt $x(i) \geq 0$, másrészt $a(i,j) \leq x(i) - x(j) \leq b(i,j)$ teljesül minden olyan esetben, amikor az i csapat legyőzte a j csapatot. (2 pont)
A feladat szövege alapján a fenti LP probléma megoldható, hisz az $x(i) = p(i)/10^6$ választással a feltételeket kielégítő megoldást kapunk (ami persze nem feltétlenül optimális). (2 pont)
Közelebbről megnézve az adódik, hogy az LP problémához tartozó mátrix két részből áll: az irányított G gráf incidenciamátrixának transzponáltjából ill. ezen transzponált (-1)-szereséből, ahol a G gráf csúcsai a csapatok, és élei pedig a nem döntetlenre végződő mérkőzésekhez tartoznak: az i csapatból a j csapatba akkor fut irányított él, ha az i csapat legyőzte a j csapatot. (2 pont)
A tanultak szerint a szóban forgó mátrix TU tulajdonságú. (2 pont)
Ezért ha a célfüggvényérték alulról korlátos, akkor az optimális megoldások között van olyan is, amelyik esetén minden $x(i)$ változó egész értéket vesz fel. (1 pont)
A nemnegativitási feltételek miatt a célfüggvényérték mindig nemnegatív, így a célfüggvényérték csakugyan alulról korlátos. Ezért a felírt LP-nek van egész optimuma, és az ezen optimális megoldásban szereplő változók egymilliószorosai olyan jutalmazást írnak le, ami teljesíti a feladatban megkívánt feltételeket. (1 pont)

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

2. ZH javítókulcs (2019. 05. 09.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Írjuk fel ILP problémaként a következő feladatot. Adott $G = (V, E)$ gráf csúcsainak keressük olyan maximális méretű U részhalmazát, amely előáll két független ponthalmaz uniójaként, azaz $U = U_1 \cup U_2$, ahol G-nek egyetlen éle sem köt össze két U_1-beli vagy két U_2-beli csúcsot. (Érdemes lehet két karakterisztikus vektorral dolgozni.)

   A G minden v csúcsához tartozzék egy $x(v)$ és egy $y(v)$ változó. Az $x(v)$ értéke akkor lesz 1, ha $v \in U_1$ (egyébként az értéke 0), az $y(v)$ pedig akkor 1, ha $v \in U_2$ (egyébként $y(v) = 0$). (2 pont)
   Ekkor a célfüggvény $\max \tilde{x}(V) + \tilde{y}(V)$, (1 pont)
   ezek a változók a 0 vagy 1 értékek valamelyikét veszik fel: $0 \le x(v) \le 1$ és $0 \le y(v) \le 1$, valamint $x(v), y(v) \in \mathbb{Z}$ teljesül minden v csúcsra, (3 pont)
   és egyetlen élnek sincs mindkét végpontja U_1-ben vagy U_2-ben: $x(u) + x(v) \le 1$ ill. $y(u) + y(v) \le 1$ teljesül G minden uv élére, (2 pont)
   valamint egyetlen v csúcs sem számíthat bele egyszerre U_1-be és U_2-be is: $x(v) + y(v) \le 1$ teljesül G minden v csúcsára. (1 pont)
   Ez tehát az ILP feladat. Világos, hogy minden keresett ponthalmaz megadható ezen feladat megoldásaként, ill. hogy minden megoldáshoz definiálhatók az egymástól diszjunkt U_1 és U_2 független ponthalmazok, melyek összmérete éppen a célfüggvényben kiszámított érték. (1 pont)

---

2. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan fülfelbontása, amelyben pontosan 7 db olyan fül szerepel, ami egyetlen ponton csatlakozik a korábban felépített gráfhoz. Legfeljebb hány elvágó éle és hány (maximális) blokkja lehet G-nek?

   Mivel a fülfelbontás mindig 2-élösszefüggő gráfot eredményez, ezért G bizonyosan 2-élösszefüggő, így elvágó éle nem lehet. Az elvágó élek száma tehát legfeljebb 0. (3 pont)
   A fülfelbontás definíciójából adódóan elvágó pontja G-nek csakis olyan csúcs lehet, ami egy fülfelbontásbeli fül mindkét végével megegyezik. (2 pont)
   Szintén a fülfelbontás mikéntjéből adódik, hogy G minden maximális blokkja tartalmaz olyan fület, amelyik a korábban felépített gráfhoz egy csúcsban csatlakozik. (3 pont)
   Mivel 7 ilyen fül van, ezért G-nek legfeljebb 7 maximális blokkja lehet. (1 pont)
   A 7 blokk el is érhető, hiszen pl. annak a gráfnak, ami 7 db pontdiszjunkt kör egy-egy csúcsának összeolvasztásából származik, van ilyen fülfelbontása. (1 pont)

   Mivel a fülfelbontásban olyan fül is szerepel, amelyiknek a két végpontja megegyezik, ezért a feladat szövegéből az következik, hogy itt a 2-élösszefüggő gráfok fülfelbontásáról van szó (amelyik egy pontból indul és az első fül két végpontja megegyezik), és nem pedig a 2-összefüggő gráfok fülfelbontásáról (amelyik egy körből indul). Ha azonban valaki körből indulónak gondolta a fülfelbontást, és ezért a végeredmény 8 lett, azért nem jár pontlevonás.

---

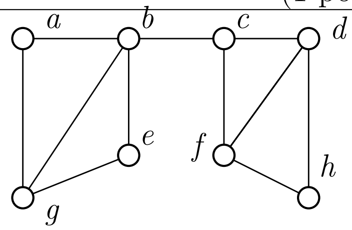
3. Tegyük fel, hogy a G gráfnak pontosan két elvágó pontja és pontosan 10 (maximális) blokkja van. Melyik az a legkisebb k érték, amire igaz, hogy a G gráf k él behúzásával garantáltan 2-szeresen pontösszefüggővé tehető?

   Az órán azt tanították, hogy a 2-összefüggőség eléréséhez pontosan $\max\{\lceil \frac{m(G)+2m'(G)}{2} \rceil, b(G) - 1\}$ a behúzandó élek minimális száma, ahol $m(G)$ a levélblokkok száma, $m'(G)$ az izolált blokkok száma, $b(G)$ pedig az ugyanazon elvágó pontot tartalmazó maximális blokkok maximális száma. (4 pont)
   Mivel összesen 10 blokk és két elvágó pont van ezért nem illeszkedik minden maximális blokk ugyanarra az

elvágó pontra, azaz $b(G) \leq 9$, tehát $b(G) - 1 \leq 8$. (2 pont)
Ha van olyan maximális blokk, amelyik mindkét elvágó pontot tartalmazza, akkor ez a blokk sem nem levél, sem nem izolált blokk, ezért az izolált blokkok száma legfeljebb 7. Innen $m(G) + 2m'(G) \leq 2 + 2 \cdot 7 = 16$ adódik, azaz $\frac{m(G)+2m'(G)}{2} \leq 8$. (1 pont)
Ha pedig a két elvágó pontot nem tartalmazza ugyanaz a maximális blokk, akkor legfeljebb 6 izolált blokk lehet, így $m(G) + 2m'(G) \leq 4 + 2 \cdot 6 = 16$, azaz $\frac{m(G)+2m'(G)}{2} \leq 8$. (1 pont)
Azt kaptuk, hogy 8 él behúzásával G mindenképpen 2-összefüggővé tehető. (1 pont)
Hét él azonban nem biztos, hogy elég, pl ha ugyanazt az elvágó pontot 9 maximális blokk tartalmazza, ezek egyike pedig tartalmaz egy másik elvágó pontot, amihez a tizedik maximális blokk is csatlakozik, akkor ez a gráf megfelel a feladatbeli feltételeknek, és $b(G) = 9$ miatt 8 él behúzása szükséges a 2-összefüggőség eléréséhez. A feladat kérdésére tehát 8 a válasz. (1 pont)

---

4. Vannak-e az ábrán látható gráfnak olyan u és v csúcsai, amelyek közti élösszefüggőségre $\lambda(u, v) = d(v)$ teljesül? Ha van, akkor keressünk ilyen csúcspárt, ha nincs, bizonyítsuk be, hogy nem létezik ilyen.



A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kapcsán tanult lemma szerint ha u és v a G egy maxvissza sorrendjének utolsó két csúcsa, akkor $\lambda(u, v) = d(v)$ tlejesül. (4 pont)
Tehát van ilyen csúcspár, és egy ilyen kereséséhez mindössze egy maxvissza sorrendet kell találni. (1 pont)
A konkrét gráfnak például g, a, b, e, c, d, f, h egy maxvissza sorrendje, (4 pont)
ezért az (f, h) megfelelő csúcspár. (1 pont)

Természetesen az is teljes értékű megoldás, ha valaki konrétan bebizonyítja egy csúcspárról, hogy rendelkezik a leírt tulajdonsággal. Például így.

Figyeljük meg, hogy a g csúcs fokszáma 3, a gb, gab, geb pedig három éldiszjunkt gb-út. (6 pont)
Ezért $\lambda(g, b) \geq 3 = d(g) \geq \lambda(g, b)$, vagyis $\lambda(g, b) = d(g)$. (3 pont)
Ezért a feladat kérdésére *igen* a válasz, és például a (b, g) csúcspár redelkezik a feladatban leírt tulajdonsággal. (1 pont)

---

5. Tegyük fel, hogy a 4-szeresen élösszefüggő G gráfnak u és v szomszédos, hatodfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van olyan ux és vy éle, amelyre az említett élek és uv törlésével, valamint egy xy él behúzásával létrejövő $G - uv - ux - vy + xy$ gráf szintén 4-szeresen élösszefüggő.

Lovász órán tanult leemelési tétele szerint ha a G gráf legalább 2-szeresen élösszefüggő és $d(v)$ páros, akkor bármely vx élhez van olyan vy él, hogy a vx, vy élpár leemelése után kapott gráf bármely két v-től különböző csúcsa között a lokális élösszefüggőség legalább $\lambda(G)$ marad. (3 pont)
Ezért (mivel $d(u)$ páros) az u csúcsból az uv élt leemelhetjük valamely ux éllel, majd a keletkezett xv élt (a szintén páros fokszámú) v-ből leemelhetjük egy másik vy éllel. (2 pont)
E két leemelés után megkapjuk a feladatban leírt $G' = G - ux - vy + xy$ gráfot, és Lovász tétele miatt bámely két u-tól és v-től különböző csúcs között legalább 4 marad az élösszefüggőség. (2 pont)
Nekünk azonban a teljes G' gráf 4-szeres élösszefüggőségét kell igazolnunk. Ehhez az immár 4-edfokúvá vált u és v csúcsokat kell teljesen leemelni. Az így kapott gráf továbbra is 4-szeresen élösszeefüggő marad. Ezután a két élpár összecsípésével kaphatjuk vissza a G' gráfot. A $2k$-szorosan élösszefüggő gráfok előállítása kapcsán azt tanították, hogy k él összecsípése megőrzi a k-szoros élösszefüggőséget. Ezt a $k = 2$ esetre alkalmazva adódik, hogy a G' gráf valóban 4-szeresen élösszefüggő, amint azt a feladat állítja. (3 pont)

A fenti megoldásban ügyelni kell arra, hogy Lovász leemelési tételében a lokális összefüggőség csak a leemelési ponttól különböző pontok között marad meg. Ezért van szükség az utolsó 3 pontos részre. Egyszerűbb leírni azt a megoldást, amelyik eleve teljes leemelésekkel operál.

Mivel a $\lambda(G) \geq 2$ és $d(u)$ ill. $d(v)$ párosak, ezért az órán tanultak miatt az u és v csúcsok teljesen leemelhetők, és az így keletkező G^* gráf 4-szeresen élössefüggő marad. (5 pont)
A leemelési konstrukció miatt G^* úgy áll elő, hogy abban x és y szomszédosak lesznek, és ezen kívül G-be még behúzunk 4 élt, mégpedig u és v szomszédai közöttt $2 - 2$-t. (2 pont)
Ha a G^* gráfban összecsípjük ezt a $2 - 2$ élt, akkor éppen egy megfelelő G' gráfot kapunk, (1 pont)
és ez az összecsípés operció az órán tanultak miatt megőrzi a 4-szeres élösszefüggőséget. Ezzel a feladat állítását igazoltuk. (2 pont)

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

1. pZH javítókulcs (2019. 05. 17.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Az alábbi táblázat A, B, C és D sorai ill. $1, 2, 3$ és 4 oszlopai alkotják a G páros gráf csúcshalmazát, a táblázatbeli számok pedig az adott sor és oszlop között futó él súlyát jelentik. Határozzunk meg G éleinek egy minimális összsúlyú lefogását, és igazoljuk, hogy nincs G éleinek nincs ennél kisebb összsúlyú lefogása.

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	0	1	9
B	0	8	6	11
C	1	5	7	12
D	9	11	12	16

Az órán tanult Egerváry algoritmus segítségével keresünk teljes párosítást: kiindulunk az oszlopmaximumokhoz ill a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken maximális párosítást keresünk. Ha ez nem teljes, akkor a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhető oszlopokon csökkentünk, a sorokon pedig növeljük a lefogást az alábbiak szerin, addig, amíg lesz a pontos élekből teljes párosítás. (3 pont)

	2	7	5	11							
	3	8	6	11							
	4	8	7	11							
	5	8	8	12							
	6	8	9	13							
	9	11	12	16							
	1	**2**	**3**	**4**							
A	$\boxed{2}$	0	1	9	0	0	0	0	0	0
B	0	$\boxed{8}$	$\underline{6}$	11	0	0	0	0	0	1
C	1	5	7	$\boxed{12}$	0	0	0	1	1	1
D	$\underline{9}$	11	$\boxed{12}$	16	0	3	4	5	6	7

A kiindulási súlyozott lefogás az $1, 2, 3$ és 4 csúcsokon a megfelelő oszlopmaximum, azaz $9, 11, 12$ és 16, a többi csúcson 0. (2 pont)
Az ábrán az algoritmust követve kapott súlyozott lefogások, bekeretezve pedig egy pontos élekből álló teljes párosítás elemei láthatók. (3 pont)
Egy 34 súlyú párosítást és egy 34 összsúlyú lefogást kaptunk. Előbbi miatt nem létezik 34-nél kisebb összsúlyú súlyozott lefogás, azaz a kapott lefogás csakugyan minimális összsúlyú. (3 pont)

---

2. Állapítsuk meg, hogy van-e valós megoldása az itt látható egyenlőtlenségrendszernek. Ha van megoldás, akkor találjunk egy olyan megoldást, amelyben az x_3 változó értéke a lehető legkisebb.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq -3 \\ 2x_2 + 3x_3 &\geq 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 5x_3 &\leq -7 \end{aligned}$$

Felírjuk a lineáris egyenlőtlenségrendszert mátrixos alakban úgy, hogy az egyenlőtlenségek azonos irányba álljanak, azaz az első két egyenlőtlenséget -1-gyel megszorozzuk. (1 pont)
Végrehajtjuk a Fourier-Motzkin eliminációt, azaz a változókat egymás után elimináljuk úgy, a 0 együtthatós egyenlőtlenségeket megőrizük, és az összes lehetséges pozitív-negatív együtthatópárra felírjuk azt az összeget, amiben az eliminálandó változó együtthatója 0-vá válik. (2 pont)

Konkrétan:
$$\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & -7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & -5 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -13 & -5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 7 \\ \hline \end{array}$$
(3 pont)

A $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \leq 7$ egyenlőtlenség adódott, ezért van megoldás. (1 pont)
Megoldás találásához a változóknak x_3, x_2, x_1 sorrendben adunk értéket, az adott változó eliminációja előtti egyenlőtlenségek figyelembevételével. (1 pont)
Az x_3-ra $-x_3 \leq 1$ és $3x_3 \leq 4$ feltételek állnak, azaz $x_3 \geq -1$ miatt az x_3 minimális értéke $x_3 = -1$. (1

pont)
Ezzel a választással x_2-re $x_2 \leq 6$, $2x_2 \geq 5$ és $3x_2 \geq 18$ adódik, tehát például az $x_2 = 6$ megfelelő. Ekkor x_1-nek az $x_1 \leq 8$, $3x_1 \leq 24$ ill. $2x_1 \geq 16$ feltételeket kell teljesítenie, tehát $x_1 = 8$. (1 pont)

---

3. (a) Oldjuk meg az itt látható lineáris programozási feladatot!

   (b) Meg lehet-e változtatni a célfüggvényt úgy, hogy az $x_1 = 20, x_2 = 10$ optimális megoldás legyen? Ha igen, akkor mutassunk példát ilyen célfüggvényre!

$$\max\{2x_1 + 3x_2\} \text{ ha}$$
$$\begin{aligned} x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\leq 20 \\ x_1 + x_2 &\leq 30 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 50 \end{aligned}$$

Az (x_1, x_2) megoldásokat a síkon ábrázoljuk. Az egyes feltételeknek egy-egy félsík felel meg, a megoldások halmaza pedig e félsíkok metszete, egy konvex taromány lesz. Ezen a tartományon kell optimalizálnunk a célfüggvényt. (1 pont)
A nemnegativitási feltételek a pozitív síknegyedet adják, ebből vág le a három félsík egy konvex ötszöget. Ezen ötszöget határoló egyes egyenesek a 30 és 50, ill. a 30 és 25 pontokban metszik az egyes koordinátatengelyeket, valamint egy egyenes párhuzamos az x_2 tengellyel, az x_1 tengelyt pedig a 20-ban metszi. Egy ezt világosan mutató ábráért is jár a (2 pont)
A szóban forgó ötszög csúcsaira a $(0, 0), (0, 25), (10, 20), (20, 10)$ és a $(20, 0)$ koordinátájú pontok adódnak, a harmadik és negyedik megtalálásához izzadságos számítás vezet. (2 pont)
Bármi is legyen a célfüggvény, az optimumát bizonyosan felveszi a fenti 5 pont valamelyikében, ezért csupán ezek közül kell kiválasztani azt, amelyik a maximalizál. (2 pont)
Ez pedig konkrétan az $x_1 = 10, x_2 = 20$ megoldáshoz tartozik, (1 pont)
az optimumérték pedig 80. (0 pont)
Mivel a $(20, 10)$ pont az ötszögön egyik csúcsa, ezért alkalmas célfüggvényre ez lesz az optimum. Alkalmas célfüggvény például $2x + 3y$ (2 pont)

Aki ebben a feladatban csupán a duális programot írja fel, az bár valójában nem jut lényegesen közelebb a megoldáshoz (hisz a duálist is optimalizálni kell, ráadásul 3 dimenzióban), mégis kap egy pontot.

---

4. Határozzuk meg azt a primál LP problémát aminek a duálisa itt látható.
(Nem tilos felrajzolni egy szamárvezetőt.)

$$\max\{2y_1 + 5y_3\} \text{ ha}$$
$$\begin{aligned} y_2, y_3 &\geq 0 \\ 3y_1 + 2y_2 - 4y_3 &\leq 42 \\ y_1 - 5y_2 &= 7 \\ 6y_1 - y_2 + 7y_3 &\geq 11 \end{aligned}$$

---

5. Egy $G = (V, E)$ gráf 2-*faktora* alatt az E egy olyan F részhalmazát értjük, amelyre G minden csúcsából pontosan két F-beli él indul. Tegyük fel, hogy G páros gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ adott súlyfüggvény. Fogalmazzuk meg a maximális súlyú 2-faktor keresésének problémáját ILP feladatként. Igaz-e, hogy a megfelelő LP feladatnak mindig van egész optimuma, azaz az ILP optimuma egyúttal optimuma az LP-nek is?

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

2. pZH javítókulcs (2019. 05. 09.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Írjuk fel ILP problémaként a következő feladatot. Adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nagyságú súlyokból kell legfeljebb k db-ot kiválasztani úgy, hogy az összsúly minél kevesebb, de legalább m legyen.

   Minden a_i súlyhoz tartozzék egy $x(i)$ változó. Az $x(i)$ értéke akkor lesz 1, ha az a_i súlyt kiválasztjuk, egyébként az értéke 0. (2 pont)
   Ekkor a célfüggvény $\min \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x(i)$, (1 pont)
   ezek a változók a 0 vagy 1 értékek valamelyikét veszik fel, azaz $0 \leq x(i) \leq 1$, valamint $x(i) \in \mathbb{Z}$ teljesül minden $1 \leq i \leq n$ indexre. (3 pont)
   Az összsúlynak legalább m-nek kell lennie, azaz $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x(i) \geq m$ (2 pont)
   valamint legfeljebb k súlyt választhatunk: $\sum_{i=1}^{n} x(i) \leq k$. (1 pont)
   Ez tehát az ILP feladat. Világos, hogy minden, a feltételeket kielégítő súlyhalmaz megadható ezen feladat megoldásaként, ill. hogy minden megoldás meghatározza az ILP egy megoldását, amelyre az összsúly éppen a célfüggvényben kiszámított érték. (1 pont)

---

2. Legkevesebb hány élt kell behúzni a bal oldali ábrán látható G gráfba ahhoz, hogy a kapott G' gráfnak legyen fülfelbontása?

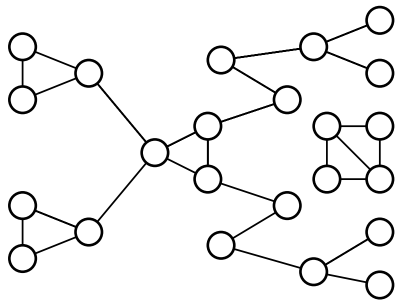
   Mivel fülfelbontása pontosan a 2-élösszefüggő gráfoknak van, ezért a keresett élszám megegyezik azon élek minimális számával, amelyek hozzáadásától G 2-élösszefüggővé válik. (4 pont)
   Mivel G-nek 6 db levél 2-komponense és 1 db izolált 2-kompnense van, (2 pont)
   ezért az órán tanultak szerint a keresett minimális élszám $\lceil \frac{6+2\cdot 1}{2} \rceil = 4$, (3 pont)
   ez tehát a válasz a feladat kérdésére is. (1 pont)

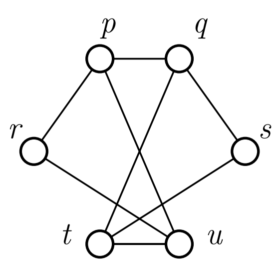
   A feladat nem igényli, hogy megtaláljunk egy optimális élhalmazt. Természetesen az is helyes befejezés, ha valaki mutat egy 4 élből álló megfelelő élhalmazt (1 pontért), igazolja, hogy ezen élek behúzásától G 2-élösszefüggő lesz (2 pontért), végül pedig azt bizonyítja (pl. levél- ill. izolált 2-kompnensek segítségével), hogy 4-nél kevesebb él nem elég mindehhez (3 pontért).

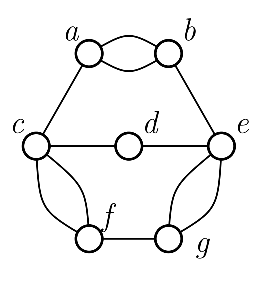
---

3. Határozzunk meg a középső ábrán látható gráfban egy minimális vágást a Nagamochi-Ibaraki-algoritmus segítségével.

   Helyes maxvissza-sorrend számítás (3 pont)
   Helyes összeolvasztások (3 pont)
   Élösszefüggőség megállapítása (2 pont)
   Helyes minvágás (2 pont)







4. A jobb oldali ábrán látható gráf egy maxvissza sorrendjében a az utolsó csúcs. Melyik az utolsó előtti csúcs ugyanebben a sorrendben?

   A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kapcsán tanult lemma szerint ha a G egy maxvissza sorrendjének utolsó két csúcsa u és a , akkor $\lambda(u, a) = d(a)$ teljesül. (4 pont)
   Ezért a-ból u-ba van 3 éldiszjunkt út. (3 pont)
   Mivel az ac, be élek elhagyása után a csak b-val kerül egy komponensbe, ezért a-ből csakis b-ba vezethet 3 éldiszjunkt út, máshova nem. (2 pont)
   Ezért a maxvissza sorrendben az utolsó előtti csúcs bizonyosan b volt. (1 pont)

---

5. Tegyük fel, hogy a 4-szeresen élösszefüggő G gráfnak u és v nem szomszédos, negyeddfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy u-nak vannak olyan a és b szomszédai, valamint v-nek olyan c és d szomszédai, hogy a $G' = G - ua - ub - vc - vd + uc + ud + va + vb$ gráf 4-szeresen összefüggő. (4 élt törlünk és 4 élt hozzáveszünk G-hez.)

   Lovász órán tanult leemelési tétele szerint ha a G gráf legalább 4-szeresen élösszefüggő és $d(v)$ páros, akkor a v csúcs teljesen leemelhető úgy, hogy a kapott gráf 4-szeresen élösszefüggő maradjon. (3 pont)
   Ezért az u és a v csúcsra is elvégezhető a teljes leemelés a 4-szeres élösszefüggőség megtartásával. (2 pont)
   Az így kapott gráfba a leemelés során be kell húzni egy ab és egy xy élt az u 4 szomszédja között, ill. a cd és zt élt a v 4 szomszédja között. (2 pont)
   Ha most összecsípjük az ab és zt ill. a cd és xy éleket, akkor egyrészt a feladatban leírt G' gráfot kapjuk, (2 pont)
   másrészt ez az operáció az órán tanultak szerint megőrzi a 4-szeres élösszefüggőséget. A G' gráf tehát csakugyan 4-szeresen élösszefüggő, ahogyan azt a feladat állítja. (1 pont)
