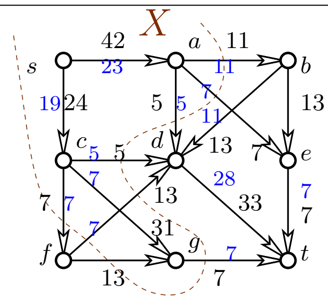
Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

1. ZH javítókulcs (2023. 04. 19.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.



1. Keressünk az ábrán látható hálózatban maximális nagyságú st-folyamot. Ha a cd él kapacitását tetszőlegesen megváltoztathatjuk, akkor ezzel legfeljebb mekkorára tudjuk növelni a maximális nagyságú st-folyam nagyságát? (15 pont)

A javító utas algoritmussal meghatároztuk az ábrán látható 42 nagyságú st-folyamot. Ehhez az $sabet(7)$, $scfgt(7)$, $sadt(5)$, $scdt(5)$, $sabdt(4)$, $saebdt(7)$ ill. $scfgdt(7)$ javításokat végeztük, a zárójelben az adott javítás során küldött folyammennyiség áll. (6 pont)
A kapott folyam mellett s-ből az $X = \{s, a, c, g\}$ csúcsok érhetők el javító úton, és ez az X halmaz egy 42 kapacitású st-vágást indukál. Ezért a megtalált 42 nagyságú folyam csakugyan maximális. (4 pont)
A cd él kapacitását megnövelve újabb javító utat találunk, mégpedig a $scdt$-t. Ezen az úton a dt él 33-as kapacitása miatt legfeljebb 5-tel növelhető a folyamnagyság. Ha tehát a cd él kapacitását legalább 5-tel megnöveljük, akkor elérhető egy 47 nagyságú st-folyam. (2 pont)
Hiába növeljük azonban 5 fölé a cd él kapacitását, ennél nagyobb folyamot nem kaphatunk, ugyanis a 47 nagyságú folyamhoz tartozó segédgráfban az s-ből elérhető csúcsok $Y = \{s, a, b, c, d, e, f, g\}$ halmaza egy 47 kapacitású st-vágást határoz meg. Ezért a feladat második részére a válasz 47. (3 pont)

A folyam maximalitásának igazolásához nem szükséges a folyamalgoritmusra hivatkozni: ha valaki (bárhogy) talál egy 42 nagyságú folyamot, és egy 42 kapacitású vágást, és erre megfelelően hivatkozik, akkor azért jár a pont. (Vagy éppenséggel akkor is, ha világosan kijelenti (és bizonyítja), hogy a 42 nagyságú folyamhoz tartozó segédgráfban már nincs st-út.) Ha azonban csak egy 42 nagyságú folyamra mutat rá a megoldó (amiről nem világos, hogyan keletkezett), és nem ad bizonyítékot a maximalitásra, akkor ez csak minimálisan visz közelebb a megoldáshoz.

---

2. Az $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$ csúcsokkal rendelkező páros gráf élsúlyait az alábbi táblázat tartalmazza. Állapítsuk meg, hogy a sorok után ill. az oszlopok alatt álló számok súlyozott lefogást alkotnak-e. Ha igen, akkor döntsük el, hogy minimális összsúlyú-e ez a súlyozott lefogás. Ha nem minimális összsúlyú, akkor keressünk egy minimális összsúlyú súlyozott lefogást. (10 pont)

	A	**B**	**C**	**D**	
1	7	7	6	5	4
2	5	6	4	3	2
3	8	7	6	6	4
4	5	6	4	3	2
	4	4	2	2	

Könnyű ellenőrizni, hogy a táblázat bármely eleme legfeljebb akkora, mint a sora végén és az oszlopa alján álló két szám összege. Ezért az első kérdésre igenlő a válasz, csakugyan súlyozott lefogásról van szó. (3 pont)
El kell döntenünk, hogy van-e ennél kisebb összsúlyú súlyozott lefogás, azaz, hogy a megadott súlyozott lefogás vajon minimális összsúlyú-e. Az órán tanultak szerint páros gráf egy súlyozott lefogása pontosan akkor minimális összsúlyú, ha van a pontos éleken teljes párosítás. (2 pont)
A pontos élek az $A3, B2, B4, C1, C2, C3, C4$ és $D3$. Ezek közül $A3, B2, C1$ párosítást alkotnak. (1 pont)
A fedetlen D oszlopból elérhető az A oszlop, valamint a 3 sor. Ennek megfelelően a két említett oszlopon csökkentünk, az soron pedig növeljük a lefogást ε-nal, ami a $D4$ mező miatt legfeljebb 1 lehet. (2 pont)
A változtatás után a kapott súlyozott lefogás összsúlya 23 lett, ezért az eredetileg megkapott nem volt

minimális összsúlyú, így a második kérdésre nemleges a válasz. (1 pont)

A $D4$ él pontossá vált, ezért a korábbi párosítást ezzel kiegészítve egy pontos élekből álló, 23 súlyú teljes párosítást kapunk. Az említett optimalitási kritérium miatt a megváltoztatott 23 összsúlyú súlyozott lefogás minimális összsúlyú. (1 pont)

Az is teljes értékű megoldás, ha valaki megindokolja, hogy a kiindulási értékek súlyozott lefogást alkotnak, előrukkol egy 23 összsúlyú súlyozott lefogással és egy 23 összsúlyú teljes párosítással, majd hivatkozik az optimalitási kritériumra, és így ad választ a feladat másik két kérdésére.

	A	**B**	**C**	**D**		
1	7	7	$\boxed{\underline{6}}$	5	4	4
2	5	$\boxed{\underline{6}}$	$\underline{4}$	3	2	2
3	$\boxed{\underline{8}}$	7	$\underline{6}$	$\underline{6}$	4	5
4	5	$\underline{6}$	$\underline{4}$	3	2	2
	4	4	2	2		
	3	4	2	1		

---

3. Döntsük el, van-e megoldása az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszernek, és ha van, akkor adjunk meg egy olyat, amelyikben az x_2 változó értéke a lehető legnagyobb. (13 pont)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &\leq 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &\geq 1 \\ x_1 - x_2 &\leq 6 \\ x_2 + x_3 &\leq 4 \end{aligned}$$

Átalakítjuk az egyenlőtlenségeket úgy, hogy mindegyik $\leq$ típusú legyen. (1 pont)

Fourier-Motzkin-eliminációt alkalmazunk, azzal a változtatással, hogy a minimalizálandó x_2 ismeretlent elimináljuk utoljára. (3 pont)

Ehhez felírjuk a kibővített együtthatómátrixot, és azt alakítjuk a tanult módon. (1 pont)

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \\ \hline \end{array} \qquad \emptyset$$ (5 pont)

Nem kaptunk tilos sort, tehát az egyenlőtlenségrendszer megoldható. (1 pont)

Az utolsónak eliminált x_2-re $3x_2 \leq 6$ ill. $3x_2 \leq 7$ adódott. Mivel azt a megoldást keressük, amiben x_2 a legnagyobb, ezért $x_2 = 2$. (1 pont)

Ezt behelyettesítve az x_3 eliminálása előtti állapotba $x_3 \leq 2$ ill. $x_3 \geq 2$ adódik, így $x_3 = 2$. Mindezt eredeti egyenlőtlenségekbe helyettesítve a $7 \leq x_1 \leq 7$ feltételt kapjuk, ahonnan $x_1 = 7$. (1 pont)

---

4. Írjuk fel az itt látható LP probléma duálisát és döntsük el, hogy a DLP probléma optimális megoldását kapjuk-e, ha minden duális változó értékét 1-nek választjuk. Vizsgáljuk meg azt is, hogy az $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ értékadás a primál feladat megoldását adja-e. (12 pont)

$$\max\{2x_1 + x_2 + 10x_3\} \text{ ha}$$
$$\begin{aligned} x_3 &\geq 0 \\ 3x_1 + 2x_3 &\leq 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 7x_3 &\leq 24 \\ x_2 - x_3 &\geq -1 \end{aligned}$$

Felírjuk az LP-t sztenderd alakban: mivel minimalizálunk, minden egyenlőtlenségnek $\leq$ típusúnak kell lennie. (1 pont)

$$\max\{2x_1+x_2+10x_3\} \text{ ha}$$
$$\begin{aligned} x_3 &\geq 0 \\ 3x_1 + 2x_3 &\leq 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 7x_3 &\leq 24 \\ -x_2 + x_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

Meghatározzuk hozzá a számárvezetőt. Az ökölszabályokat alkalmazva három duálváltozó lesz, mondjuk y_1, y_2 és y_3. (1 pont)

Ezek mindegyike egyenlőtlenséghez tartozik, ezért nemnegatívak. (1 pont)

A primálban maximalizálunk, ezért a duálban minimalizálunk, és $\geq$ típusú egyenlőtlenségek lesznek a feltételekben. (1 pont)

Mivel x_1, x_2 előjelkötetlen, ezért a megfelelő duálfeltételek egyenlőségek, a nemnegatív x_3-hoz tartozó pedig egyenlőtlenség. (1 pont)

A primál jobboldalak duál célfv együtthatók, a primál célfv együtthatók pedig duál jobboldalak lesznek. (2 pont)

A szamárvezető alapján felírjuk a DLP feladatot. (1 pont)

	x_1	x_2	$0 \leq x_3$	
$0 \leq y_1$	3	0	2	≤ 9
$0 \leq y_2$	-1	2	7	≤ 24
$0 \leq y_3$	0	-1	1	≤ 1
	$= 2$	$= 1$	≥ 10	

$$\min\{9y_1 + 24y_2 + y_3\} \text{ ha}$$
$$\begin{aligned} y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \\ 3y_1 - y_2 &= 2 \\ 2y_2 - y_3 &= 1 \\ 2y_1 + 7y_2 + y_3 &\geq 10 \end{aligned}$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy $y_1 = y_2 = y_3 = 1$ megoldása a DLP-nek: $3 \cdot 1 - 1 = 2, 2 \cdot 1 - 1 = 1$, valamint $2 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 1 \geq 10$.

Ezért a feladat kérdésére igenlő a válasz. (1 pont)

Ehhez a duálmegoldáshoz a $9 \cdot 1 + 24 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 34$ célfüggvényérték tartozik. Ha egyetlen duálmegoldás célfüggvényértéke sem kisebb ennél, akkor ez a megoldás optimális. (1 pont)

Szintén behelyettesítéssel adódik, hogy az $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ értékadás a primál feladat olyan megoldása, amihez a célfüggvényérték szintén 34. Ezért a vizsgált primál- és duálmegoldás is optimális. (2 pont)