Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

1. ZH javítókulcs (2020. 03. 31.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

A beadás után hozott szankciók:	
2 percen túli késéssel beadás:	két percenként 1 pont levonás
Elforgatott kép feltöltése:	2 pont levonás.

1. Bármilyen kemény munka is a locsolkodás, a kijárási korlátozás miatt mindenki csak egy helyen végezheti ezt. Három (fiú)testvér (**A**, **B** és **C**) próbál minél több piros tojást gyűjteni a jeles alkalommal. Öt lehetséges helyre mehetnek (**1**, **2**, **3**, **4** és **5**) és az alábbbi táblázatba gyűjtötték, hogy mennyi tojásra számítanak az egyes locsolók, ha az adott helyen öntöznek Határozzuk meg, hogy legfeljebb hány tojást tudnak ilyen feltételek mellett összegyűjteni. Adjunk ehhez egy locsolási tervet, és mutassuk is meg, hogy az így megszerezhetőnél nem gyűjthető több tojás a fenti feltételek mellett. (Figyelem: három fiú csak három helyen locsolhat!)

	A	**B**	**C**
1	9	11	7
2	13	11	10
3	10	12	9
4	14	20	16
5	10	10	8

Egy maximális súlyú párosítást kell keresnünk abban a páros gráfban, amelyiknek egyik színosztályában az A, B, C, a másikban pedig az $1, 2, 3, 4, 5$ csúcsok vannak. Az élsúlyok a táblázatban látható tojásszámok. (2 pont)

A tanult Egerváry-algoritmust csak négyzetes mátrixokra tudjuk alkalmazni, ezért még bevezetünk két virtuális testvért, akik bárhol 0 tojást tudnak gyűjteni. Ezáltal egy 5×5 méretű táblázatot kapunk, amelyiknek a teljes párosításai megfelelnek a lehetséges tojáslogiksztikáknak. (2 pont)

Ebben az 5×5-ös táblázaban kell tehát az Egerváry-algoritmus segítségével teljes párosítást keresünk: kiindulunk az oszlopmaximumokhoz ill a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken keresünk maximális párosítást. Ha ez nem teljes, akkor a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhető oszlopokon csökkentünk, a sorokon pedig növeljük a lefogást az alábbiak szerint, addig, amíg lesz a pontos élekből teljes párosítás. (1 pont)

	A	**B**	**C**	**D**	**E**				
1	9	11	7	0	$\boxed{0}$	0	0	0	0
2	$\boxed{13}$	11	10	0	0	0	0	0	1
3	10	12	$\boxed{9}$	0	0	0	0	0	0
4	14	$\boxed{20}$	16	0	0	0	1	6	7
5	10	10	8	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0
	14	20	16	0	0				
	13	19	15	0	0				
	13	14	10	0	0				
	12	13	9	0	0				

A kiindulási súlyozott lefogás az **A**, **B**, **C**, **D**, **E** csúcsokon a megfelelő oszlopmaximum, azaz $14, 20, 16, 0$ és 0, a többi csúcson 0. (1 pont)

Az ábrán az algoritmust követve kapott súlyozott lefogások, bekeretezve pedig egy pontos élekből álló teljes párosítás elemei láthatók. (1 pont)

Egy 42 súlyú párosítást és egy 42 összsúlyú lefogást kaptunk. Utóbbi miatt nem létezik 42-nél nagyobb összsúlyú teljes párosítás, ezért az előzetes táblázat alapján a megszerezhető tojások maximális száma pontosan 42. (2 pont)

Ez a maximum pedig úgy érhető el, ha az **A** testvér a **2**-es, a **B** a **4**-es, **C** pedig a **3**-as helyszínen dolgozik. (1 pont)

Az is teljes értékű megoldás, ha megfigyeljük, hogy az **1**-es é **5**-ös helyszínekre senkinek sem érdemes elmennie, hiszen a maradék helyszínek bármelyikén legalább annyi tojást gyűjthtet. Így egy 3×3-as táblázat marad, ahol akár az Egerváry-algoritmussal, akár a 6 lehetőség ellenőrzésével célt érünk.

2. Fourier-Motzkin-elimináció segítségével állapítsuk meg, van-e megoldása az itt látható egyenlőtlenségrendszernek. Ha igen, akkor határozzunk meg egy olyat, amelyikre az x_3 változó a lehető legnagyobb.

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3 &\le 3\\ 2x_1-x_2-2x_3 &\ge 3\\ x_1-2x_2+2x_3 &\le 1\\ 2x_2-x_3 &\le 5 \end{aligned}$$

(Sajnos a feladat kitűzését elrontottam. A feladatlapon szereplő hibás változat megoldása jóval több meddő számolással jár. Sajnálom.)

Felírjuk a lineáris egyenlőtlenségrendszert mátrixos alakban úgy, hogy az egyenlőtlenségek azonos irányba álljanak, azaz a második egyenlőtlenséget -1-gyel megszorozzuk, majd az x együtthatója szerint átrendezzük a feltételeket: felülre vesszük a pozitív együtthatós sorokat, a alulra pedig a 0-kat. (1 pont)

Végrehajtjuk a Fourier-Motzkin eliminációt, azaz a változókat egymás után elimináljuk úgy, hogy a 0 együtthatós egyenlőtlenségeket megőrizzük, és az összes lehetséges pozitív-negatív együtthatópárra felírjuk azt az összeget, amiben az eliminálandó változó együtthatója 0-vá válik. (2 pont)

Konkrétan: $\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & -1 & 5\\ \hline \end{array}$ $\quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 4 & 3 & 0\\ 0 & -3 & 6 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 5\\ \hline \end{array}$ $\quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 5\\ 0 & -3 & 6 & -1\\ \hline \end{array}$ $\quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 33 & -4\\ 0 & 0 & 9 & 13\\ \hline \end{array}$ $\quad \emptyset$ (3 pont)

Üres egyenlőtlenségrendszer adódott, ezért van megoldás. (1 pont)

Konkrét megoldás előállításához a változóknak x_3, x_2, x_1 sorrendben adunk értéket, az adott változó eliminációja előtti egyenlőtlenségek figyelembevételével. (1 pont)

Az x_3-ra $33x_3 \le -4$ és $9x_3 \le 13$ feltételek állnak, azaz x_3 maximális értéke $x_3 = \frac{-4}{33}$. (1 pont)

Ezzel a választással x_2-re $4x_2 \le \frac{12}{33}$, $2x_2 \le 5+x_3$ ill. $3x_2 \ge 1+6x_3 = \frac{9}{33}$ adódik, amiből közös nevezőre hozással az derül ki, hogy $x_2 = \frac{3}{33}$ az egyedüli lehetséges választás. Ekkor x_1-nek a $2x_1 \le 3-\frac{5}{33}$, $x_1 \le 1+\frac{14}{33} = \frac{47}{33}$ ill. $2x_1 \ge 3-\frac{5}{33} = \frac{94}{33}$ feltételeket kell teljesítenie, tehát $x_1 = \frac{47}{33}$. (1 pont)

---

3. Piréziában kétféle pálinkát szabad otthon párolni: 50%-os ill. 80%-os alkoholtartalmút. További szabály, hogy senki sem párolhat 400 liternél több 80%-osat, vagy 600 liternél több 50%-osat. Ezen kívül a kétféle pálinka összalkoholtartalma sem haladhatja meg a 400 litert. A rezsicsökkentés jegyében rögzítették az árakat: az 50%-osat literenkét 100, a 80-százalékosat pedig literenként 150 forintért kell forgalmazni. Mennyit érdemes párolni az egyes fajtákból ahhoz, hogy az eladásból származó bevételünket maximalizáljuk?

(Talán érdemes lenne felírni egy LP feladatot.)

Jelölje x és y az 50 ill. 80%-os változatokból lepárolt mennyiséget. Feladatunk a $100x+150y$ mennyiség maximalizálása. (1 pont)

Az egyes változatokra vonatkozó feltételek $x \le 600$ és $y \le 400$ (a nemnegativitás mellett). (1 pont)

Az alkoholtartalomra vonatkozó korlátozás a $0,5\cdot x + 0,8\cdot y \le 400$ feltétellel ekvivalens. (1 pont)

A nemnegativitási feltételek a pozitív síknegyedet adják, ebből vág le a három félsík egy konvex ötszöget. Az ötszög csúcsai $(0,0), (600,0), (600,125), (160,400), (0,400)$. (3 pont)

Az órán tanultak szerint a konvex tartomány valamelyik csúcsa optimális megoldás lesz, (1 pont)

ezért az egyes csúcsok célfüggvényértékét vizsgáljuk. (1 pont)

Ezek közül a $(600,125)$ pontban vétetik fel a maximum (értéke $60000+18750=78750$). (1 pont)

Ezek szerint akkor járunk (bevétel szempontjából) a legjobban, ha 600 liter 50%-os és 125 liter 80%-os pálinkát főzünk. (1 pont)

---

4. Határozzuk meg azt a primál LP problémát aminek a duálisa itt látható.
(Nem tilos szamárvezetőt rajzolni.)

$$\begin{aligned} &\min\{2y_1-7y_3\} \text{ ha}\\ y_2 &\ge 0\\ y_1-y_2-4y_3 &\le 42\\ 3y_1+7y_2-y_3 &\ge 5\\ y_1+y_2+y_3 &= 33 \end{aligned}$$

Először sztenderd alakba írjuk a DLP-t, azaz mivel mindmalizálunk, ezért mindenhol egyenlőségeknek vagy $\ge$ típusú egyenlőtlenségeknek kell állniuk. (Középen) (2 pont)

Ezt követően felrajzoljuk a szamárvezetőt. (Jobbra) (1 pont)

$$\begin{aligned} &\min\{2y_1-7y_3\} \text{ ha}\\ y_2 &\ge 0\\ -y_1+y_2+4y_3 &\ge -42\\ 3y_1+7y_2-y_3 &\ge 5\\ y_1+y_2+y_3 &= 33 \end{aligned}$$

	$0 \le x_1$	$0 \le x_2$	x_3	
y_1	-1	3	1	$=2$
$0 \le y_2$	1	7	1	≤ 0
y_3	4	-1	1	$=-7$
	≥ -42	≥ 5	$=33$	

Mivel a DLP-ben maximalizálunk, az LP-ben minimalizálni fogunk. (2 pont)

Csak az y_2-re van nemnegativitási megkötés, ezért az első és harmadik primálfeltétel egyenlőség, a második pedig ($\geq$ típusú) egyenlőtlenség. (2 pont)
Egyedül a harmadik duálfeltétel egyenlőség, ezért kizárólag az x_3 primálváltozóra nincs nemnegativitási feltétel az LP-ben. (2 pont)
Miután a fenti megállapítások szerint kitöltöttük a szamárvezetőt, fel tudjuk írni az keresett LP feladatot. (Jobbra látható.) (1 pont)

$$\begin{aligned} \max\{-42x_1 + 5x_2 + 33x_3\} \quad & \text{ha} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 &\leq 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= -7 \end{aligned}$$

---

5. A korona elleni küzdelemben szerzett múlhatatlan éredemei elismeréseként Pirézia elnökének tiszteletére az ország n focicsapata között szeretnénk egy időben a lehető legtöbb mérkőzést megszervezni. Figyelembe kell azonban venni, hogy a helyi szabályok minden piréz megyére meghatározzák, hogy egy időben hány csapat mérkőzhet az adott megyén kívüli csapattal. (Egy M megye esetén $c(M)$ jelöli ezt a felső korlátot.) További feltétel, hogy a lejátszott mérkőzések legalább a felében két olyan csapatnak kell egymással játszania, amelyek azonos bajnokságban játszanak.

   Írjunk fel egy olyan IP problémát, ami a fenti feladatot oldja meg: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris és esetleges egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt.

   Vezessünk be az $\binom{n}{2}$ lehetséges mérkőzés mindegyikéhez egy-egy változót: az i és j csapatok által lejátszott (vagy le nem játszott) meccsehez tartozzék az $x(ij)$. (Az $x(ij)$ változót hivatkozhatjuk $x(ji)$-ként is, vagyis e két változó ugyanaz.) A lejátszott meccsek karakterisztikus vektorához keresünk leíró feltételeket. (2 pont)
   Ha egy ilyen karakterisztikus vektorral dolgozunk, akkor a célfüggvény (ami a lejátszott meccsek száma) könnyen felírható: $\max \sum_{\forall i,j} x(ij)$. (1 pont)
   A tanult módon érjük el, hogy karakterisztikus vektorral dolgozzunk: minden $x(ij)$ váltózóhoz tartozik a $0 \leq x(ij) \leq 1$ lineáris feltétel és egy egészértékűségi megkötés. (2 pont)
   A megyékre vonatkozó szabály is lineáris feltételnek felel meg: minden M megyére megkívánjuk, hogy $\sum\{x(ij) : i \in M \not\ni j\} \leq c(M)$ (2 pont)
   Végül arra kell lineáris feltételt felírnunk, hogy a meccseknek legalább felét azonos bajnokságban játszó csapatok játsszák. Ez azzal ekvivalens, hogy legalább annyi meccset játszanak azonos bajnokságban szereplő csapatok, mint amennyit különböző bajnokságban szereplők játszanak. Jelölje U az azonos bajnokságban szereplő csapatok közti (lehetséges) meccsek a halmazát, V pedig azon (lehetséges) meccsekét, amelyben különböző bajnokságban szereplő csapatok az ellenfelek. A szóban forgó feltétel ekkor éppen az $\tilde{x}(U) \geq \tilde{x}(V)$ egyenlőtlenség teljesülésével egyenértékű. (2 pont)
   Mivel minden kívánalmat sikerült átfogalmaznunk IP terminológiára, a fenti feltételek és céfüggvény pontosan a vizsgált problémát írják le. (1 pont)