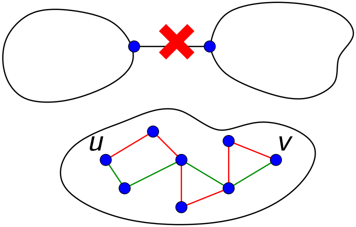
Felsőbb matematika villamosmérnököknek – Kombinatorikus optimalizálás

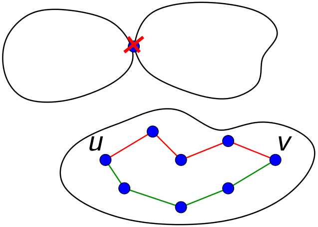
2-(él)öf és erősen összefüggő gráfok

2020. április 14.

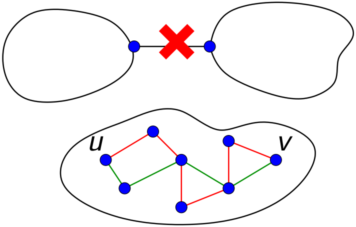
Bevezetés

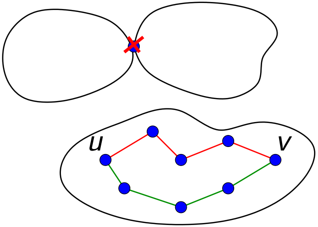
Def: Egy G gráf akkor 2-élösszefüggő, ha nincs elvágó éle, azaz G bármely két csúcsa között vezet két éldiszjunkt út. A G egyszerű gráf akkor 2-összefüggő, ha legalább 3 csúcsa van, és nincs elvágó pontja, avagy G bármely két csúcsa között vezet két belsőlet pontdiszjunkt út. Az irányított G gráf akkor gyengén összefüggő, ha G irányítatlan értelemben összefüggő, és akkor erősen összefüggő, ha G bármely u, v csúcsaira van G-ben irányított uv-út (és a v, u választás miatt irányított vu-út is).





Def: Egy G gráf akkor 2-élösszefüggő, ha nincs elvágó éle, azaz G bármely két csúcsa között vezet két éldiszjunkt út. A G egyszerű gráf akkor 2-összefüggő, ha legalább 3 csúcsa van, és nincs elvágó pontja, avagy G bármely két csúcsa között vezet két belsőlet pontdiszjunkt út. Az irányított G gráf akkor gyengén összefüggő, ha G irányítatlan értelemben összefüggő, és akkor erősen összefüggő, ha G bármely u, v csúcsaira van G-ben irányított uv-út (és a v, u választás miatt irányított vu-út is).





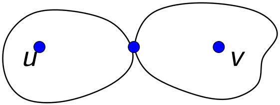
A továbbiakban 2-(él)összefüggő és erősen összefüggő gráfok tulajdonságaival, struktúrájával foglalkozunk.

2-öf gráfok egy jellemzése

Menger tétele: A G gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha G bármely két u, v csúcsához létezik olyan C kör, ami az u, v csúcsokat tartalmazza.

Menger tétele: A G gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha G bármely két u, v csúcsához létezik olyan C kör, ami az u, v csúcsokat tartalmazza.

Biz: Ha G nem 2-összefüggő, akkor van elvágó pontja. Legyenek u és v legyen két csúcs G két különböző blokkjából.

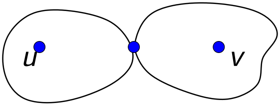


Ekkor G-nek nincs olyan köre, ami u és v mindegyikét tartalmazza.

2-öf gráfok egy jellemzése

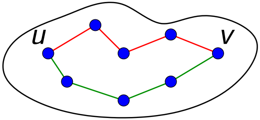
Menger tétele: A G gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha G bármely két u, v csúcsához létezik olyan C kör, ami az u, v csúcsokat tartalmazza.

Biz: Ha G nem 2-összefüggő, akkor van elvágó pontja. Legyenek u és v legyen két csúcs G két különböző blokkjából.



Ekkor G-nek nincs olyan köre, ami u és v mindegyikét tartalmazza.

Ha viszont G 2-összefüggő és $u, v \in V(G)$, akkor Menger tétele szerint van G-ben két belsőleg pontdiszjunkt uv-út.



Ezek együtt egy u-t és v-t tartalmazó kört adnak. $\square$

2-öf gráfok egy jellemzése

Menger tétele: A G gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha G bármely két u, v csúcsához létezik olyan C kör, ami az u, v csúcsokat tartalmazza.

2-öf gráfok egy jellemzése

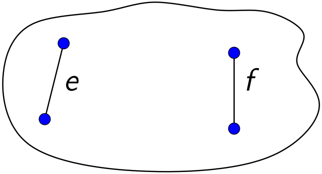
Menger tétele: A G gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha G bármely két u, v csúcsához létezik olyan C kör, ami az u, v csúcsokat tartalmazza.

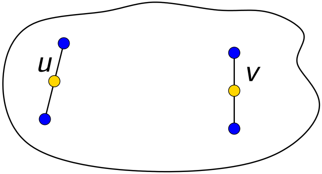
Menger tétele: Tfh G-nek nincs izolált pontja. Ekkor G pontosan akkor 2-összefüggő, ha G bármely két e, f élére létezik olyan C kör, ami az e, f éleket tartalmazza.

Menger tétele: A G gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha G bármely két u, v csúcsához létezik olyan C kör, ami az u, v csúcsokat tartalmazza.

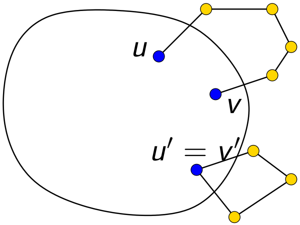
Menger tétele: Tfh G-nek nincs izolált pontja. Ekkor G pontosan akkor 2-összefüggő, ha G bármely két e, f élére létezik olyan C kör, ami az e, f éleket tartalmazza.

Biz: Ha bmely 2 élhez van kör, akkor bmely 2 csúcshoz is, így az előző tétel miatt G 2-öf. Ha G 2-öf, és e, f élek akkor e-re egy u, f-re egy v csúcsot ültetve nem keletkezik elvágó pont, így a gráf 2-öf marad, tehát van u-n és v-n keresztül kör, ami G-ben épp egy e-t és f-et tartalmazó kör. □





Tétel: Tetsz. G gráf akkor és csak akkor 2-élösszefüggő, ha G előállítható egy pontból kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy fület ragasztunk az addig elkészült gráfhoz, azaz egy u és v pont közé olyan utat veszünk be, amelynek belső csúcsai újak. Itt $u = v$ is megengedett.



2-élöf gráfok fülfelbontása 10:06

Tétel: Tetsz. G gráf akkor és csak akkor 2-élösszefüggő, ha G előállítható egy pontból kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy fület ragasztunk az addig elkészült gráfhoz, azaz egy u és v pont közé olyan utat veszünk be, amelynek belső csúcsai újak. Itt $u = v$ is megengedett.

Tétel: Tetsz. G gráf akkor és csak akkor 2-élösszefüggő, ha G előállítható egy pontból kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy fület ragasztunk az addig elkészült gráfhoz, azaz egy u és v pont közé olyan utat veszünk be, amelynek belső csúcsai újak. Itt $u = v$ is megengedett.

Biz: Tfh G-nek van fülfelbontása. Mivel a kiindulási egypontú gráf 2-élöf, és egyetlen fül hozzáadásakor sem keletkezik elvágó él, ezért a felépített G 2-élöf lesz.

Tétel: Tetsz. G gráf akkor és csak akkor 2-élösszefüggő, ha G előállítható egy pontból kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy fület ragasztunk az addig elkészült gráfhoz, azaz egy u és v pont közé olyan utat veszünk be, amelynek belső csúcsai újak. Itt $u = v$ is megengedett.

Biz:

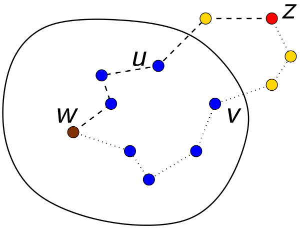
2-élöf gráfok fülfelbontása 10:06

Tétel: Tetsz. G gráf akkor és csak akkor 2-élösszefüggő, ha G előállítható egy pontból kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy fület ragasztunk az addig elkészült gráfhoz, azaz egy u és v pont közé olyan utat veszünk be, amelynek belső csúcsai újak. Itt $u = v$ is megengedett.

Biz: Tfh G 2-élöf. Induljunk ki G tetsz. w csúcsából és építsük G-t fülek hozzávételével amíg tudjuk. Ha így minden csúcsot sikerült megkapni, akkor a hiányzó élek fülekként hozzáadhatók, és G-t el tudjuk készíteni.

Tétel: Tetsz. G gráf akkor és csak akkor 2-élösszefüggő, ha G előállítható egy pontból kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy fület ragasztunk az addig elkészült gráfhoz, azaz egy u és v pont közé olyan utat veszünk be, amelynek belső csúcsai újak. Itt $u = v$ is megengedett.

Biz: Tfh G 2-élöf. Induljunk ki G tetsz. w csúcsából és építsük G-t fülek hozzávételével amíg tudjuk. Ha így minden csúcsot sikerült megkapni, akkor a hiányzó élek fülekként hozzáadhatók, és G-t el tudjuk készíteni.

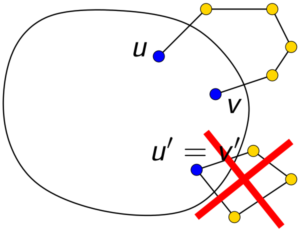


Ha van olyan z csúcs, amit eddig nem sikerült megkapni, akkor tekintsünk G-ben két éldiszjunkt zw-utat. Legyen ezeknek első olyan csúcsa, amit már felépítettünk u ill. v. Ekkor a már felépített gráfhoz hozzáadható egy z-t tartalmazó uv-fül.

Tehát tetsz. 2-élöf G gráfnak van fülfelbontása. $\square$

2-öf gráfok fülfelbontása 15:21

Tétel: Tetsz. G gráf akkor és csak akkor 2-összefüggő, ha G előállítható egy körből kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy fület ragasztunk az addig elkészült gráfhoz, azaz egy u és v pont közé olyan utat veszünk be, amelynek belső csúcsai újak. Itt $u = v$ nem megengedett.



2-öf gráfok fülfelbontása 15:21

Tétel: Tetsz. G gráf akkor és csak akkor 2-összefüggő, ha G előállítható egy körből kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy fület ragasztunk az addig elkészült gráfhoz, azaz egy u és v pont közé olyan utat veszünk be, amelynek belső csúcsai újak. Itt $u = v$ nem megengedett.

2-öf gráfok fülfelbontása 15:21

Tétel: Tetsz. G gráf akkor és csak akkor 2-összefüggő, ha G előállítható egy körből kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy fület ragasztunk az addig elkészült gráfhoz, azaz egy u és v pont közé olyan utat veszünk be, amelynek belső csúcsai újak. Itt $u = v$ nem megengedett.

Biz: Tfh G-nek van fülfelbontása. Mivel a kiindulási kör gráf 2-öf, és egyetlen fül hozzáadásakor sem keletkezik elvágó pont, ezért a felépített G 2-öf lesz.

Tétel: Tetsz. G gráf akkor és csak akkor 2-összefüggő, ha G előállítható egy körből kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy fület ragasztunk az addig elkészült gráfhoz, azaz egy u és v pont közé olyan utat veszünk be, amelynek belső csúcsai újak. Itt $u = v$ nem megengedett.

Biz:

2-öf gráfok fülfelbontása 15:21

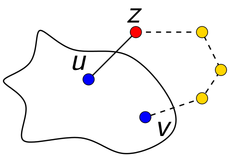
Tétel: Tetsz. G gráf akkor és csak akkor 2-összefüggő, ha G előállítható egy körből kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy fület ragasztunk az addig elkészült gráfhoz, azaz egy u és v pont közé olyan utat veszünk be, amelynek belső csúcsai újak. Itt $u = v$ nem megengedett.

Biz: Tfh G 2-öf. Induljunk ki G tetsz. C köréből és építsük G-t fülek hozzávételével amíg tudjuk. Ha így minden csúcsot sikerült megkapni, akkor a hiányzó élek fülekként hozzáadhatók, és G-t el tudjuk készíteni.

Tétel: Tetsz. G gráf akkor és csak akkor 2-összefüggő, ha G előállítható egy körből kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy fület ragasztunk az addig elkészült gráfhoz, azaz egy u és v pont közé olyan utat veszünk be, amelynek belső csúcsai újak. Itt $u = v$ nem megengedett.

Biz: Tfh G 2-öf. Induljunk ki G tetsz. C köréből és építsük G-t fülek hozzávételével amíg tudjuk. Ha így minden csúcsot sikerült megkapni, akkor a hiányzó élek fülekként hozzáadhatók, és G-t el tudjuk készíteni.

Ha van olyan csúcs, amit eddig nem sikerült megkapni, legyen uz egy már felépített u csúcsból egy felépítetlen z-be vezető G-beli él. Mivel G-nek u nem elvágó pontja, ezért $G - u$-ban vezet z-ből út a már felépített részbe.



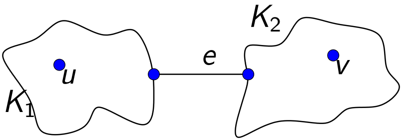
Legyen v az út első már megépült pontja. Ekkor az út zv-része a zu éllel egy uv-fülként hozzáadható az eddig felépített gráfhoz. Tehát tetsz. 2-öf G gráfnak van fülfelbontása. $\square$

Erősen összefüggő gráfok jellemzése

Robbins tétele: Tetszőleges G irányítatlan gráf éleit pontosan akkor lehet erősen összefüggővé irányítani, ha G 2-élösszefüggő.

Erősen összefüggő gráfok jellemzése 19:30

Robbins tétele: Tetszőleges G irányítatlan gráf éleit pontosan akkor lehet erősen összefüggővé irányítani, ha G 2-élösszefüggő.
Biz: Tfh G nem 2-élöf, azaz G az e él elhagyásától szétesik egy K_1 és egy K_2 komponensre. Legyen u és v rendre a K_1 ill. a K_2 egy-egy csúcsa. Ha e-t a K_1-ből a K_2-be irányítjuk, akkor nem lesz irányított vu-út, ha K_2-ből K_1-be, akkor nem lesz irányított uv-út. Ezért a 2-élösszefüggőség szükséges az eöf irányítás létezéséhez.



Robbins tétele: Tetszőleges G irányítatlan gráf éleit pontosan akkor lehet erősen összefüggővé irányítani, ha G 2-élösszefüggő.

Biz: Tfh G nem 2-élöf, azaz G az e él elhagyásától szétesik egy K_1 és egy K_2 komponensre. Legyen u és v rendre a K_1 ill. a K_2 egy-egy csúcsa. Ha e-t a K_1-ből a K_2-be irányítjuk, akkor nem lesz irányított vu-út, ha K_2-ből K_1-be, akkor nem lesz irányított uv-út. Ezért a 2-élösszefüggőség szükséges az eöf irányítás létezéséhez.

Robbins tétele: Tetszőleges G irányítatlan gráf éleit pontosan akkor lehet erősen összefüggővé irányítani, ha G 2-élösszefüggő.
Biz: Tfh G nem 2-élöf, azaz G az e él elhagyásától szétesik egy K_1 és egy K_2 komponensre. Legyen u és v rendre a K_1 ill. a K_2 egy-egy csúcsa. Ha e-t a K_1-ből a K_2-be irányítjuk, akkor nem lesz irányított vu-út, ha K_2-ből K_1-be, akkor nem lesz irányított uv-út. Ezért a 2-élösszefüggőség szükséges az eöf irányítás létezéséhez.

Elégségesség. Ha G 2-élöf, akkor van G-nek fülfelbontása az előző tétel szerint. Ennek segítségével úgy kaphatjuk meg G eöf irányítását, hogy minden hozzáadott fül éleit a fül mentén egy irányba irányítjuk. Könnyű látni, hogy bármely a felépítés bármely köztes állapotában a kapott gráf eöf lesz: ha ugyanis u az újonnan bevett fül, v pedig a korábban felépített gráf egy-egy csúcsa, akkor van a fül bevétele utáni gráfban irányított uv- és vu-út is.
Ezért a fülek megirányításával felépített gráf az eredeti G gráf egy eöf irányítása. $\square$

Hurrá!