Felsőbb matematika villamosmérnököknek – Kombinatorikus optimalizálás

Gráfok összefüggőségének meghatározása, minimális vágás keresése

2020. április 7.

Bevezetés 0:24

Egy gráf akkor összefüggő, ha bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet út. Definiálható a magasabb összefüggőség is, ami a gyakorlatban is hasznos fogalom pl megbízható hálózatok tevezésekor.

Bevezetés 0:24

Egy gráf akkor összefüggő, ha bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet út. Definiálható a magasabb összefüggőség is, ami a gyakorlatban is hasznos fogalom pl megbízható hálózatok tevezésekor.
Egy G gráf akkor k-szorosan élösszefüggő (k-élöf), ha bárhogy is törlünk G-ből legfeljebb $k-1$ élt, azt G túléli (vagyis összefüggő marad). Menger tétele szerint ez azzal ekvivalens, hogy G bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet k olyan út, amelyek közül semelyik kettőnek sincs közös éle. A G gráf élösszefüggősége $\lambda(G)=k$, ha G k-élöf, de nem $(k+1)$-élöf. Ez az érték megegyezik G minimális vágásának méretével, ahol minimális vágás az olyan lehető legkevesebb élből álló halmaz, amit elhagyva G nem marad öf.

Egy G gráf akkor k-szorosan pontösszefüggő (k-öf), ha (1) $|V(G)| \geq k+1$ és (2) bárhogy is törlünk G-ből legfeljebb $k-1$ csúcsot, azt G túléli (vagyis összefüggő marad). Menger tétele szerint ez azzal ekvivalens, hogy G bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet k olyan út, amelyek közül semelyik kettőnek sincs közös belső csúcsa. (Az (1) feltétel jelentősége, hogy annak hiányában K_n bármilyen k-ra k-öf lenne. G pontösszefüggősége $\kappa(G) = k$, ha G k-öf, de nem $(k+1)$-öf. Pl. $\kappa(K_n) = n$.

Egy G gráf akkor k-szorosan pontösszefüggő (k-öf), ha (1) $|V(G)| \geq k+1$ és (2) bárhogy is törlünk G-ből legfeljebb $k-1$ csúcsot, azt G túléli (vagyis összefüggő marad). Menger tétele szerint ez azzal ekvivalens, hogy G bármely csúcsából bármely másik csúcsába vezet k olyan út, amelyek közül semelyik kettőnek sincs közös belső csúcsa. (Az (1) feltétel jelentősége, hogy annak hiányában K_n bármilyen k-ra k-öf lenne. G pontösszefüggősége $\kappa(G) = k$, ha G k-öf, de nem $(k+1)$-öf. Pl. $\kappa(K_n) = n$.

Az 2-élöf ill 2-öf gráfok struktúráját fogjuk vizsgálni, és áltatlban azt nézzük meg, hogyan lehet egy gráfban minimális vágást találni, azaz minimális számú él törlésével elérni, hogy G ne maradjon összefüggő.

$\lambda(G)$ meghatározása folyamokkal 9:25

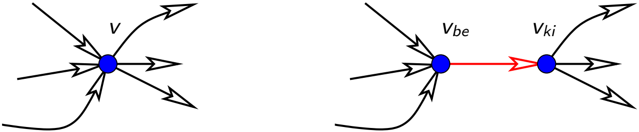
Ha $\lambda(G)$-t keressük, akkor azt szeretnénk megállapítani, mennyi a legkevesebb él, aminek a törlésétől G szétesik, azaz G egy u és egy v csúcsa között nem lesz út. Rögzített u, v esetén egyetlen folyamalgoritmussal meg tudunk határozni egy minimális uv-vágást G-ben ($c \equiv 1$ és G minden élét oda-vissza megirányítjuk). Ha az összes lehetséges u, v csúcspárra ezt megtesszük, akkor a kapott legkisebb vágás G egy minimális vágása lesz.

$\lambda(G)$ meghatározása folyamokkal

Ha $\lambda(G)$-t keressük, akkor azt szeretnénk megállapítani, mennyi a legkevesebb él, aminek a törlésétől G szétesik, azaz G egy u és egy v csúcsa között nem lesz út. Rögzített u, v esetén egyetlen folyamalgoritmussal meg tudunk határozni egy minimális uv-vágást G-ben ($c \equiv 1$ és G minden élét oda-vissza megirányítjuk). Ha az összes lehetséges u, v csúcspárra ezt megtesszük, akkor a kapott legkisebb vágás G egy minimális vágása lesz.
Ennél azonban van jobb módszer is. Legyen v a G egy kitüntetett csúcsa. G barmely minimális vágása olyan, hogy ha elhagyjuk az éleit, akkor lesz G-nek olyan $u \neq v$ csúcsa, hogy u és v közöt nincs út. Ezért G bármely minvágása olyan, hogy megkapható a kitüntetett v-t egy alkalmas u csúcstól szeparáló minimális vágásként egyetlen folyamalgoritmussal. Ezért ha v-t rögzítjük, akkor elegendő $n-1$ folyamalgoritmust futtani, ahol n a G csúcsai száma. (Tkp. $\lambda(G)$ a $\lambda(u, v)$-k minimuma, ahol v rögzített, u pedig bmelyik másik csúcs lehet.)

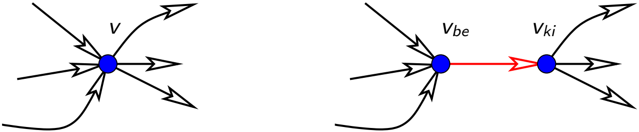
$\kappa(G)$ meghatározása folyamokkal 15:33

Az előbbi ötlet működik a pontösszefüggőség meghatározására is. Ha az összes u, v csúcspárra meghatározzuk $\kappa(u, v)$-t (az u és v között futó, belsőleg páronként pontdiszjunkt utak maximális számát), akkor $\kappa(G) = \min\{|V(G)| - 1, \kappa(u, v)\}$ alapján $\kappa(G)$ meghatározható. Egyetlen $\kappa(u, v)$ meghatározása szintén lehetséges a folyamalgoritmussal, ha az éleket oda-vissza megirányítjuk, a csúcsokat széthúzzuk és minden élnek 1 kapacitást adunk.



$\kappa(G)$ meghatározása folyamokkal

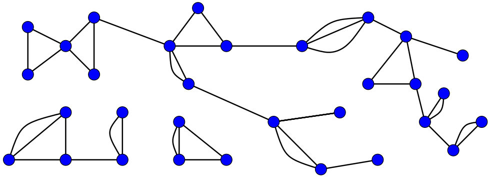
Az előbbi ötlet működik a pontösszefüggőség meghatározására is. Ha az összes u, v csúcspárra meghatározzuk $\kappa(u,v)$-t (az u és v között futó, belsőleg páronként pontdiszjunkt utak maximális számát), akkor $\kappa(G) = \min\{|V(G)| - 1, \kappa(u,v)\}$ alapján $\kappa(G)$ meghatározható. Egyetlen $\kappa(u,v)$ meghatározása szintén lehetséges a folyamalgoritmussal, ha az éleket oda-vissza megirányítjuk, a csúcsokat széthúzzuk és minden élnek 1 kapacitást adunk.



Pontösszefüggőség meghatározásakor azonban nem működik a második ötlet: nem rögzíthetjük az $s = v$ csúcsot, mert lehet, hogy v-t el kell hagyni G minimális vágásban.

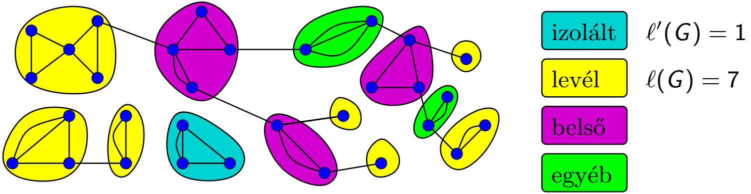
Gráfok 2-élösszefüggőségi struktúrája 21:05

A G gráf akkor 2-élöf, ha G öf, és G-nek nincs elvágó éle, azaz olyan éle, amit elhagyva G szétesik.



A G gráf akkor 2-élöf, ha G öf, és G-nek nincs elvágó éle, azaz olyan éle, amit elhagyva G szétesik.

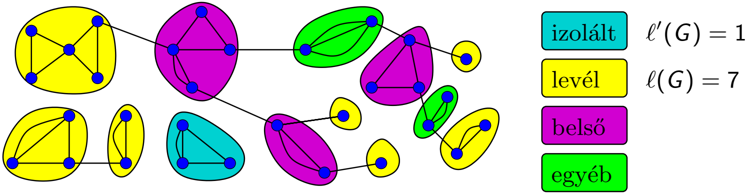
Def: A G gráf 2-komponensei a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei. Egy 2-kompnenens izolált, ha 0, levél, ha 1 és belső, ha legalább 3 elvágó él indul belőle. $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. az izolált 2-komponensei számát jelöli.



Gráfok 2-élösszefüggőségi struktúrája 21:05

A G gráf akkor 2-élöf, ha G öf, és G-nek nincs elvágó éle, azaz olyan éle, amit elhagyva G szétesik.

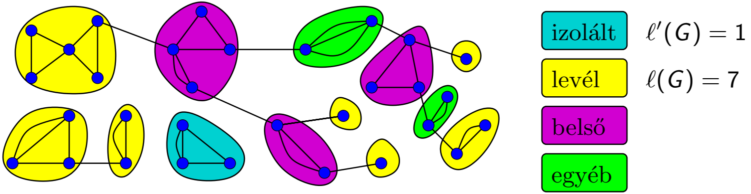
Def: A G gráf 2-komponensei a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei. Egy 2-kompnenens izolált, ha 0, levél, ha 1 és belső, ha legalább 3 elvágó él indul belőle. $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. az izolált 2-komponensei számát jelöli.



Megf: A G gráf 2-komponenseit egy-egy pontba összeolvasztva olyan erdőt kapunk, aminek élei a G elvágó élei. Ha G összefüggő, akkor ez az erdő fa.

A G gráf akkor 2-élöf, ha G öf, és G-nek nincs elvágó éle, azaz olyan éle, amit elhagyva G szétesik.

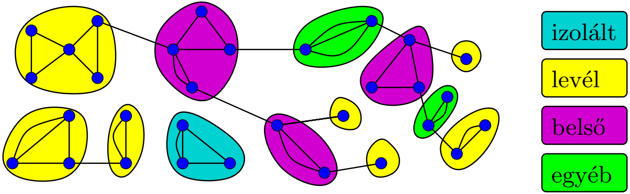
Def: A G gráf 2-komponensei a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei. Egy 2-kompnenens izolált, ha 0, levél, ha 1 és belső, ha legalább 3 elvágó él indul belőle. $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. az izolált 2-komponensei számát jelöli.



Gráfok 2-élösszefüggőségi struktúrája

A G gráf akkor 2-élöf, ha G öf, és G-nek nincs elvágó éle, azaz olyan éle, amit elhagyva G szétesik.

Def: A G gráf 2-komponensei a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei. Egy 2-kompnenens izolált, ha 0, levél, ha 1 és belső, ha legalább 3 elvágó él indul belőle. $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. az izolált 2-komponensei számát jelöli.



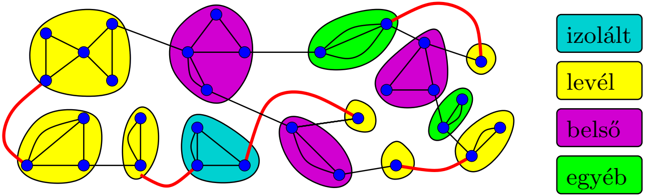
$\ell'(G) = 1$

$\ell(G) = 7$

Tétel: A G gráf 2-élösszefüggővé tételéhez szükséges behúzandó élek minimális száma $\left\lceil \frac{\ell(G)+2\ell'(G)}{2} \right\rceil$.

A G gráf akkor 2-élöf, ha G öf, és G-nek nincs elvágó éle, azaz olyan éle, amit elhagyva G szétesik.

Def: A G gráf 2-komponensei a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei. Egy 2-kompnenens izolált, ha 0, levél, ha 1 és belső, ha legalább 3 elvágó él indul belőle. $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. az izolált 2-komponensei számát jelöli.



$\ell'(G) = 1$

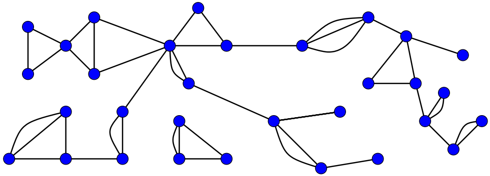
$\ell(G) = 7$

Tétel: A G gráf 2-élösszefüggővé tételéhez szükséges behúzandó élek minimális száma $\left\lceil \frac{\ell(G)+2\ell'(G)}{2} \right\rceil$.

Biz: Minden levél 2-komponensből ki kell indulnia egy új élnek, minden izolált 2-komponensből legalább 2-nek. Mindig be lehet húzni olyan élt, ami a formula értékét 1-gyel csökkenti. □

Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája 31:03

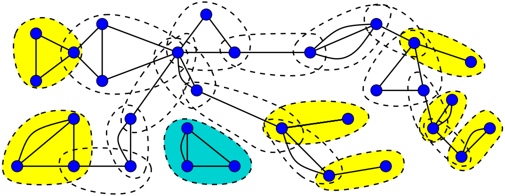
G akkor 2-öf, ha G öf, $|V(G)| \geq 3$, és G-nek nincs elvágó pontja.

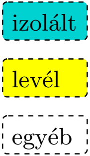


Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája

G akkor 2-öf, ha G öf, $|V(G)| \geq 3$, és G-nek nincs elvágó pontja.

Def: Blokk: elvágó pont mentes öf gráf. Maxblokk: maximális blokk részgráf. G egy maxblokkja izolált blokk (levélblokk), ha G-nek 0 (1) elvágó pontját tartalmazza. $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. az izolált blokkjai számát, $b(G)$ pedig az ugyanazon elvágó pontra illeszkedő maxblokkok maximális jelöli.





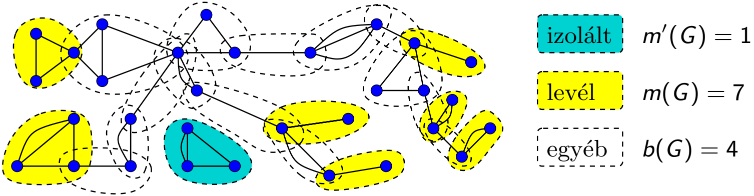
$m'(G) = 1$

$m(G) = 7$

$b(G) = 4$

Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája 31:03

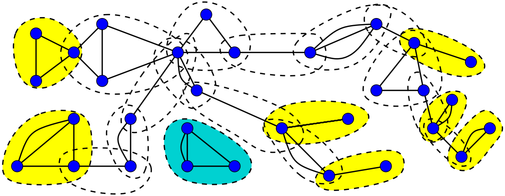
G akkor 2-öf, ha G öf, $|V(G)| \geq 3$, és G-nek nincs elvágó pontja.
Def: Blokk: elvágó pont mentes öf gráf. Maxblokk: maximális blokk részgráf. G egy maxblokkja izolált blokk (levélblokk), ha G-nek 0 (1) elvágó pontját tartalmazza. $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. az izolált blokkjai számát, $b(G)$ pedig az ugyanazon elvágó pontra illeszkedő maxblokkok maximális jelöli.

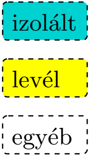


Megf: A G gráf maxblokkjai az elvágó pontok mentén faszerűen kapcsolódnak: ha minden maxblokkot egy csúccsal helyettesítünk, amit a G maxblokkbeli elvágó pontjaival kötünk össze, akkor így olyan $T_2(G)$ erdőt kapunk, aminek csúcsai a maxblokkok és G elvágó pontjai. Ha G öf, akkor $T_2(G)$ fa. $T_2(G)$ izolált pontjai az izolált blokkoknak, a levelei pedig a levélblokkoknak felelnek meg.

Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája 31:03

G akkor 2-öf, ha G öf, $|V(G)| \geq 3$, és G-nek nincs elvágó pontja.
Def: Blokk: elvágó pont mentes öf gráf. Maxblokk: maximális blokk részgráf. G egy maxblokkja izolált blokk (levélblokk), ha G-nek 0 (1) elvágó pontját tartalmazza. $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. az izolált blokkjai számát, $b(G)$ pedig az ugyanazon elvágó pontra illeszkedő maxblokkok maximális jelöli.





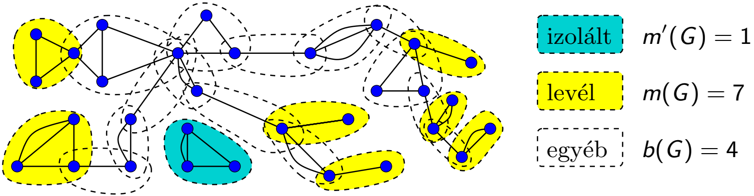
$m'(G) = 1$

$m(G) = 7$

$b(G) = 4$

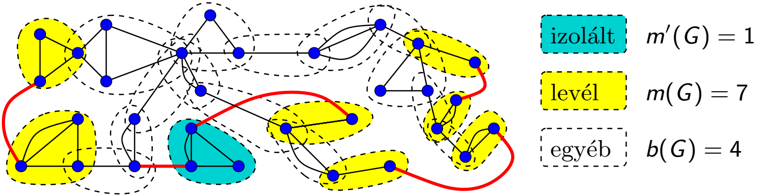
Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája

G akkor 2-öf, ha G öf, $|V(G)| \geq 3$, és G-nek nincs elvágó pontja.
Def: Blokk: elvágó pont mentes öf gráf. Maxblokk: maximális blokk részgráf. G egy maxblokkja izolált blokk (levélblokk), ha G-nek 0 (1) elvágó pontját tartalmazza. $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. az izolált blokkjai számát, $b(G)$ pedig az ugyanazon elvágó pontra illeszkedő maxblokkok maximális jelöli.



Tétel: A G gráf 2-összefüggővé tételéhez szükséges behúzandó élek minimális száma $\max\left\{ b(G) - 1, \left\lceil \frac{m(G)+2m'(G)}{2} \right\rceil \right\}$.

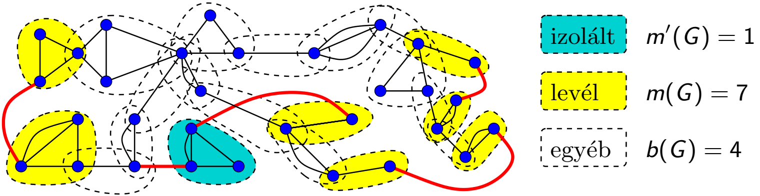
G akkor 2-öf, ha G öf, $|V(G)| \geq 3$, és G-nek nincs elvágó pontja.
Def: Blokk: elvágó pont mentes öf gráf. Maxblokk: maximális blokk részgráf. G egy maxblokkja izolált blokk (levélblokk), ha G-nek 0 (1) elvágó pontját tartalmazza. $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. az izolált blokkjai számát, $b(G)$ pedig az ugyanazon elvágó pontra illeszkedő maxblokkok maximális jelöli.



Tétel: A G gráf 2-összefüggővé tételéhez szükséges behúzandó élek minimális száma $\max\left\{b(G)-1, \left\lceil \frac{m(G)+2m'(G)}{2} \right\rceil\right\}$.
Biz: Minden levélblokkból kell indulnia új élnek, minden izoláltból legalább 2-nek. Ha egy elvágó ponton $b(G)$ maxblokk ül, akkor már emiatt legalább $b(G)-1$ él szükséges.

Gráfok 2-összefüggőségi struktúrája 31:03

G akkor 2-öf, ha G öf, $|V(G)| \geq 3$, és G-nek nincs elvágó pontja.
Def: Blokk: elvágó pont mentes öf gráf. Maxblokk: maximális blokk részgráf. G egy maxblokkja izolált blokk (levélblokk), ha G-nek 0 (1) elvágó pontját tartalmazza. $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. az izolált blokkjai számát, $b(G)$ pedig az ugyanazon elvágó pontra illeszkedő maxblokkok maximális jelöli.



Tétel: A G gráf 2-összefüggővé tételéhez szükséges behúzandó élek minimális száma $\max\left\{b(G) - 1, \left\lceil \frac{m(G)+2m'(G)}{2} \right\rceil\right\}$.
Biz: Mindig be lehet húzni egy élt úgy, hogy a formula értékét 1-gyel csökkenjen, ezért a formula által megadott szamú él elegendő. $\square$

Cél: Adott $G = (V, E)$ n csúcsú gráfra és $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásokra $\lambda_c(G)$ meghatározása, azaz a lehető legkevesebb összkapacitású élek törlésével elérni, hogy G szétessen.

Gráf élösszefüggőségének meghatározása I. 40:44

Cél: Adott $G = (V, E)$ n csúcsú gráfra és $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásokra $\lambda_c(G)$ meghatározása, azaz a lehető legkevesebb összkapacitású élek törlésével elérni, hogy G szétessen.

Megf: Legyen $E(X)$ egy minimális vágás G-ben a c kap.fv-re. Ha a c-vel arányos eloszlással random e élt választunk, akkor $P(e \in E(X)) \leq \frac{2}{n}$, azaz $P(e \notin E(X)) \geq \frac{n-2}{n}$.

Gráf élösszefüggőségének meghatározása I. 40:44

Cél: Adott $G = (V, E)$ n csúcsú gráfra és $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásokra $\lambda_c(G)$ meghatározása, azaz a lehető legkevesebb összkapacitású élek törlésével elérni, hogy G szétessen.

Megf: Legyen $E(X)$ egy minimális vágás G-ben a c kap.fv-re. Ha a c-vel arányos eloszlással random e élt választunk, akkor $P(e \in E(X)) \leq \frac{2}{n}$, azaz $P(e \notin E(X)) \geq \frac{n-2}{n}$.

Biz: $2\tilde{c}(E) = \sum\{\tilde{c}(E(v)) : v \in V\} \geq n \cdot \lambda_c(G)$, így $P(e \in E(X)) = \frac{\lambda_c(G)}{\tilde{c}(E)} \leq \frac{2}{n}$. $\square$

Gráf élösszefüggőségének meghatározása I. 40:44

Cél: Adott $G = (V, E)$ n csúcsú gráfra és $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásokra $\lambda_c(G)$ meghatározása, azaz a lehető legkevesebb összkapacitású élek törlésével elérni, hogy G szétessen.

Megf: Legyen $E(X)$ egy minimális vágás G-ben a c kap.fv-re. Ha a c-vel arányos eloszlással random e élt választunk, akkor $P(e \in E(X)) \leq \frac{2}{n}$, azaz $P(e \notin E(X)) \geq \frac{n-2}{n}$.

Gráf élösszefüggőségének meghatározása I.

Cél: Adott $G = (V, E)$ n csúcsú gráfra és $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásokra $\lambda_c(G)$ meghatározása, azaz a lehető legkevesebb összkapacitású élek törlésével elérni, hogy G szétessen.

Megf: Legyen $E(X)$ egy minimális vágás G-ben a c kap.fv-re. Ha a c-vel arányos eloszlással random e élt választunk, akkor $P(e \in E(X)) \leq \frac{2}{n}$, azaz $P(e \notin E(X)) \geq \frac{n-2}{n}$.

Megf: Ha $e \notin E(X)$, akkor az X által reprezentált minvágás az e összehúzása után is megmarad. Ezért annak a valószínűsége, hogy az $E(X)$ minvágás egymás után $n-2$ random élösszehúzást túlél, legalább $\frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)}$.

Gráf élösszefüggőségének meghatározása I.

Cél: Adott $G = (V, E)$ n csúcsú gráfra és $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásokra $\lambda_c(G)$ meghatározása, azaz a lehető legkevesebb összkapacitású élek törlésével elérni, hogy G szétessen.

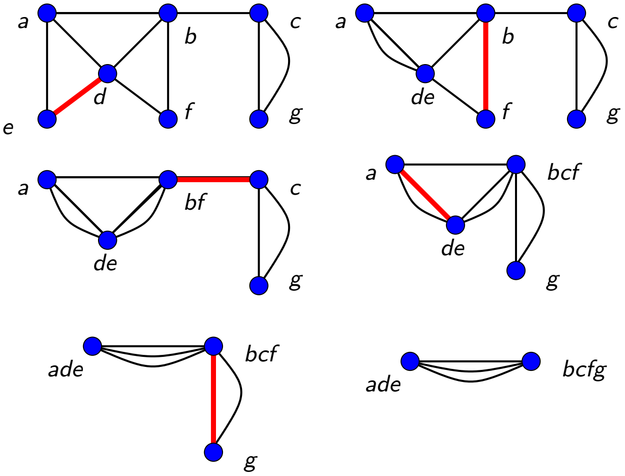
Megf: Legyen $E(X)$ egy minimális vágás G-ben a c kap.fv-re. Ha a c-vel arányos eloszlással random e élt választunk, akkor $P(e \in E(X)) \leq \frac{2}{n}$, azaz $P(e \notin E(X)) \geq \frac{n-2}{n}$.

Megf: Ha $e \notin E(X)$, akkor az X által reprezentált minvágás az e összehúzása után is megmarad. Ezért annak a valószínűsége, hogy az $E(X)$ minvágás egymás után $n-2$ random élösszehúzást túlél, legalább $\frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)}$.

Karger algoritmusa: c-vel arányos eloszlással válasszunk random élt, és húzzuk össze. (Élösszehúzásnál itt a párhuzamos éleket megtartjuk, a hurokéleket töröljük.) Ismételjük ezt egészen addig, amíg a gráf két csúcsú marad. A két csúcs ősképe által meghatározott vágás egy jelölt a G minimális vágására. Annak a valószínűsége, hogy $k \cdot n^2$ ilyen jelölt között $E(X)$ nem fordul elő legfeljebb e^{-2k}.

Karger algoritmusának illusztrációja 46:24

Az összehúzandó random élt piros szín jelöli. A végső vágásjelölt az $\{a, d, e\}$ csúcshalmazból kilépő élek halmaza.



Gráf élösszefüggőségének meghatározása II. 51:00

Cél: Gyors, egyszerű determinisztikus algoritmus $\lambda(G)$ meghatározására. ($\lambda_c(G)$-re is működik, de most $c \equiv 1$.)

Gráf élösszefüggőségének meghatározása II. 51:00

Cél: Gyors, egyszerű determinisztikus algoritmus $\lambda(G)$ meghatározására. ($\lambda_c(G)$-re is működik, de most $c \equiv 1$.)

Def: A G gráf csúcsainak $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrendje, ha minden $i = 1, 2, \ldots, n$ eetén v_i azon csúcsok egyike, amelyik a legtöbb éllel kapcsolódik a $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ halmazhoz.

Megf: Maxvissza sorrend nagyon gyorsan található.

Gráf élösszefüggőségének meghatározása II. 51:00

Cél: Gyors, egyszerű determinisztikus algoritmus $\lambda(G)$ meghatározására. ($\lambda_c(G)$-re is működik, de most $c \equiv 1$.)

Def: A G gráf csúcsainak $v_1, v_2, \dots, v_n$ maxvissza sorrendje, ha minden $i = 1, 2, \dots, n$ eetén v_i azon csúcsok egyike, amelyik a legtöbb éllel kapcsolódik a $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ halmazhoz.

Megf: Maxvissza sorrend nagyon gyorsan található.

Tétel: Ha $v_1, v_2, \dots, v_n$ a G csúcsainak maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$. $\square$

Gráf élösszefüggőségének meghatározása II. 51:00

Cél: Gyors, egyszerű determinisztikus algoritmus $\lambda(G)$ meghatározására. ($\lambda_c(G)$-re is működik, de most $c \equiv 1$.)

Def: A G gráf csúcsainak $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrendje, ha minden $i = 1, 2, \ldots, n$ eetén v_i azon csúcsok egyike, amelyik a legtöbb éllel kapcsolódik a $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ halmazhoz.

Megf: Maxvissza sorrend nagyon gyorsan található.

Tétel: Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G csúcsainak maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$. $\square$

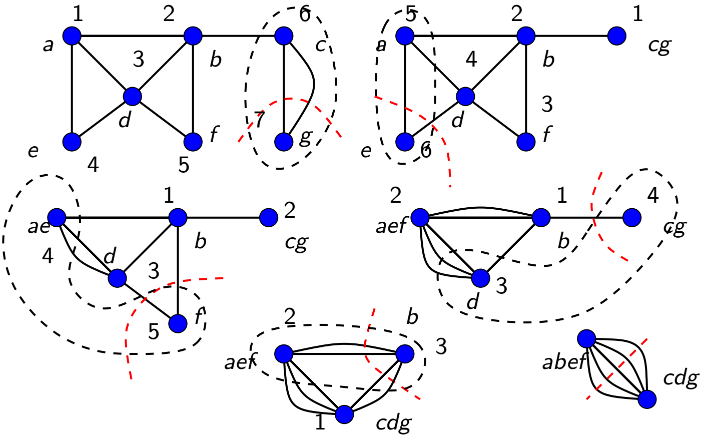
Köv: Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G csúcsainak maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(G) = d(v_n)$ vagy $\lambda(G) = \lambda(G/v_{n-1}v_n)$, ahol G/uv az u és v csúcsok egybeolvasztásával kapott gráf. $\square$

Gráf élösszefüggőségének meghatározása II. 51:00

Cél: Gyors, egyszerű determinisztikus algoritmus $\lambda(G)$ meghatározására. ($\lambda_c(G)$-re is működik, de most $c \equiv 1$.)
Def: A G gráf csúcsainak $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrendje, ha minden $i = 1, 2, \ldots, n$ eetén v_i azon csúcsok egyike, amelyik a legtöbb éllel kapcsolódik a $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ halmazhoz.
Megf: Maxvissza sorrend nagyon gyorsan található.
Tétel: Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G csúcsainak maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$. □
Köv: Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G csúcsainak maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(G) = d(v_n)$ vagy $\lambda(G) = \lambda(G/v_{n-1}v_n)$, ahol G/uv az u és v csúcsok egybeolvasztásával kapott gráf. □
Nagamochi-Ibaraki-algoritmus: Maxvissza sorrendet generálunk, és az utolsó két csúcsot egybeolvasztjuk, majd ugyanezt ismételjük egészen addig, amíg csak 2 csúcs marad. Minden köztes gráf utolsó csúcsából kiinduló élek által definiált egypontú vágásnak megfelel az eredeti G gráf egy vágása. Ezen $n-1$ jelölt közül a legkevesebbélt tartalmazó az output: ez G egy minimális vágása.

A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus illusztrációja 56:51

A maxvissza sorrendet számozás, az összeolvasztandó csúcspárt szaggatott bekeretezés, a vágásjelölteket szaggatott piros ív jelöli. A legjobb vágásjelölt $\{c, g\}$ csúcshalmazból kilépő élek halmaza: ez az algoritmus outputja.



Ennyi!