Kombinatorikus optimalizálás

A lineáris programozás dualitástétele

2023. március 28.

Hol tartunk?

- Lineáris egyenletrendszereket (elméletileg) meg tudunk oldani Fourier-Motzkin-eliminációval.

Hol tartunk?

- Lineáris egyenletrendszereket (elméletileg) meg tudunk oldani Fourier-Motzkin-eliminációval.
- Pontosan akkor oldható meg egy ilyen rendszer, ha nem kapunk tilos sort.

Hol tartunk?

- Lineáris egyenletrendszereket (elméletileg) meg tudunk oldani Fourier-Motzkin-eliminációval.
- Pontosan akkor oldható meg egy ilyen rendszer, ha nem kapunk tilos sort.
- Ezt fejezi ki a Farkas-lemma.

Hol tartunk?

- Lineáris egyenletrendszereket (elméletileg) meg tudunk oldani Fourier-Motzkin-eliminációval.
- Pontosan akkor oldható meg egy ilyen rendszer, ha nem kapunk tilos sort.
- Ezt fejezi ki a Farkas-lemma.
- A Farkas-lemma segítségével bármely lineáris egyenlőtlenségrendszerhez konstruálható egy alternatív egyenlőtlenségrendszer (pontosan egy szigorú egyenlőtlenséggel) úgy, hogy az eredeti és a konstruált rendszerből pontosan az egyiknek van megoldása.

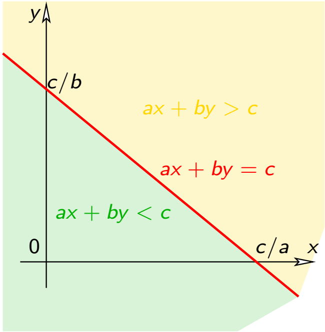
Hol tartunk?

- Lineáris egyenletrendszereket (elméletileg) meg tudunk oldani Fourier-Motzkin-eliminációval.
- Pontosan akkor oldható meg egy ilyen rendszer, ha nem kapunk tilos sort.
- Ezt fejezi ki a Farkas-lemma.
- A Farkas-lemma segítségével bármely lineáris egyenlőtlenségrendszerhez konstruálható egy alternatív egyenlőtlenségrendszer (pontosan egy szigorú egyenlőtlenséggel) úgy, hogy az eredeti és a konstruált rendszerből pontosan az egyiknek van megoldása.
- Ma a lineáris egyenlőtlenségrendszerek geometriai jelentését vizsgáljuk, és az egész megoldások létezésének jelentőségére és egy lehetséges feltételére mutatunk rá.

Lineáris egyenlőtlenségek geometriája

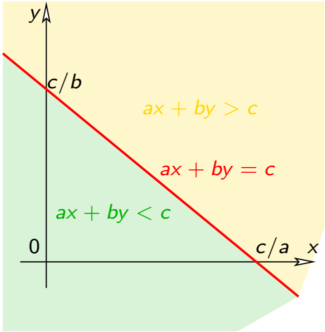
Két változó esetén az értékadások megfeleltethetők a koordinátasík pontjainak. Mi jelent ekkor egy lineáris egyenlet ill. egyenlőtlenség?

Lineáris egyenlőtlenségek geometriája



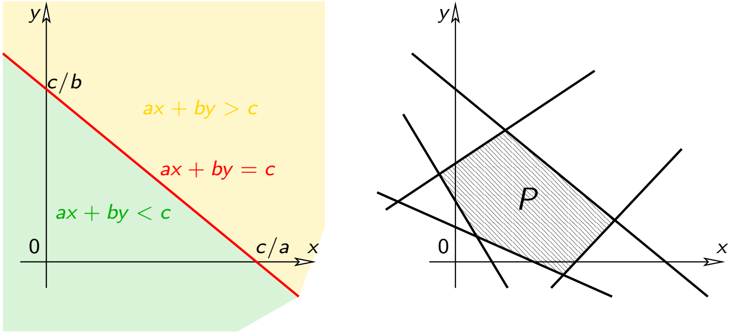
Két változó esetén az értékadások megfeleltethetők a koordinátasík pontjainak. Mi jelent ekkor egy lineáris egyenlet ill. egyenlőtlenség? Egyenlet: egyenes, egyenlőtlenség: félsík.

Lineáris egyenlőtlenségek geometriája



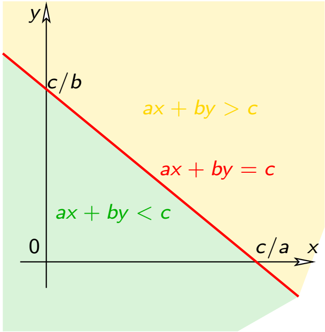
Két változó esetén az értékadások megfeleltethetők a koordinátasík pontjainak. Mi jelent ekkor egy lineáris egyenlet ill. egyenlőtlenség?
Egyenlet: egyenes, egyenlőtlenség: félsík.
3 változó esetén egyenlet: sík, egyenlőtlenség: féltér.

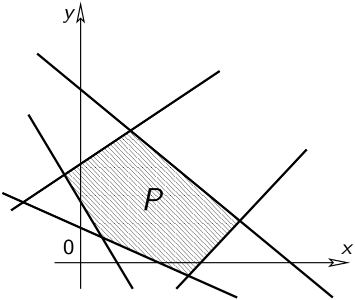
Lineáris egyenlőtlenségek geometriája



Két változó esetén az értékadások megfeleltethetők a koordinátasík pontjainak. Mi jelent ekkor egy lineáris egyenlet ill. egyenlőtlenség?
Egyenlet: egyenes, egyenlőtlenség: félsík.
3 változó esetén egyenlet: sík, egyenlőtlenség: féltér.
Lineáris egyenletrendszer: egyenesek/síkok metszete (affin altér),
egyenlőtlenségrendszer: félsíkok/félterek metszete (poliéder).

Lineáris egyenlőtlenségek geometriája

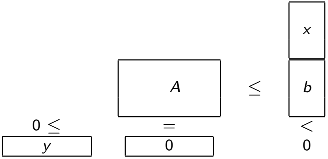




Két változó esetén az értékadások megfeleltethetők a koordinátasík pontjainak. Mi jelent ekkor egy lineáris egyenlet ill. egyenlőtlenség?
Egyenlet: egyenes, egyenlőtlenség: félsík.
3 változó esetén egyenlet: sík, egyenlőtlenség: féltér.
Lineáris egyenletrendszer: egyenesek/síkok metszete (affin altér), egyenlőtlenségrendszer: félsíkok/félterek metszete (poliéder).
3-nál több változó esetén is ugyanez a helyzet (hipersíkok, félterek metszete), csak ez nem olyan szemléletes.

Jön a Farkas

Farkas-lemma: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$.
Avagy: tetsz. A mátrixra és b oszlopvektorra az $Ax \leq b$ ill.
$y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ közül pontosan egy megoldható.



Jön a Farkas

Farkas-lemma: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$.
Avagy: tetsz. A mátrixra és b oszlopvektorra az $Ax \leq b$ ill.
$y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ közül pontosan egy megoldható.

Farkas-lemma néhány alakja:

1. $(\exists x : Ax = b) \iff (\nexists y : yA = 0, yb \neq 0)$

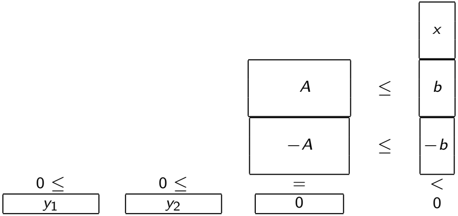
Jön a Farkas

Farkas-lemma: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$.
Avagy: tetsz. A mátrixra és b oszlopvektorra az $Ax \leq b$ ill. $y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ közül pontosan egy megoldható.

Farkas-lemma néhány alakja:

1. $(\exists x : Ax = b) \iff (\nexists y : yA = 0, yb \neq 0)$

Biz: $\exists x : Ax = b \iff \exists x : Ax \leq b,\ -Ax \leq -b \iff$
$\iff \nexists y_1, y_2 \geq 0 : y_1 A + y_2(-A) = 0, y_1 b + y_2(-b) < 0 \iff$
$\iff \nexists y_1, y_2 \geq 0 : y_1 A - y_2 A = 0, y_1 b - y_2 b < 0 \iff$
$\iff \nexists y_1, y_2 \geq 0 : (y_1 - y_2)A = 0, (y_1 - y_2)b < 0 \iff$
$\iff \nexists y : yA = 0,\ yb < 0 \iff \nexists y : yA = 0,\ yb \neq 0$ $\square$



Jön a Farkas

Farkas-lemma: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$.
Avagy: tetsz. A mátrixra és b oszlopvektorra az $Ax \leq b$ ill.
$y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ közül pontosan egy megoldható.
Farkas-lemma néhány alakja:
1. $(\exists x : Ax = b) \iff (\nexists y : yA = 0, yb \neq 0)$

Biz: $\exists x : Ax = b \iff \exists x : Ax \leq b,\ -Ax \leq -b \iff$
$\iff \nexists y_1, y_2 \geq 0 : y_1 A + y_2(-A) = 0, y_1 b + y_2(-b) < 0 \iff$
$\iff \nexists y_1, y_2 \geq 0 : y_1 A - y_2 A = 0, y_1 b - y_2 b < 0 \iff$
$\iff \nexists y_1, y_2 \geq 0 : (y_1 - y_2)A = 0, (y_1 - y_2)b < 0 \iff$
$\iff \nexists y : yA = 0,\ yb < 0 \iff \nexists y : yA = 0,\ yb \neq 0$ $\square$

(Ugyanezt a Gauss-eliminációból is levezethettük volna.)

$$\begin{array}{ccccc} & & & & x \\ & & A & \leq & b \\ & & -A & \leq & -b \\ 0 \leq & 0 \leq & = & & < \\ y_1 & y_2 & 0 & & 0 \end{array}$$

Jön a Farkas

Farkas-lemma: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$.
Avagy: tetsz. A mátrixra és b oszlopvektorra az $Ax \leq b$ ill.
$y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ közül pontosan egy megoldható.
Farkas-lemma néhány alakja:
1. $(\exists x : Ax = b) \iff (\nexists y : yA = 0, yb \neq 0)$

Jön a Farkas

Farkas-lemma: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$.
Avagy: tetsz. A mátrixra és b oszlopvektorra az $Ax \leq b$ ill. $y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ közül pontosan egy megoldható.

Farkas-lemma néhány alakja:

1. $(\exists x : Ax = b) \iff (\nexists y : yA = 0, yb \neq 0)$
2. $(\exists x \geq 0 : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA \geq 0, yb < 0)$

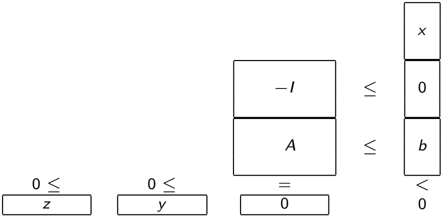
Jön a Farkas

Farkas-lemma: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$.
Avagy: tetsz. A mátrixra és b oszlopvektorra az $Ax \leq b$ ill.
$y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ közül pontosan egy megoldható.

Farkas-lemma néhány alakja:

1. $(\exists x : Ax = b) \iff (\nexists y : yA = 0, yb \neq 0)$
2. $(\exists x \geq 0 : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA \geq 0, yb < 0)$

Biz: $\exists x \geq 0 : Ax \leq b \iff \exists x : -x \leq 0,\ Ax \leq b, \iff$
$\iff \nexists z, y \geq 0 : -z + yA = 0,\ z \cdot 0 + yb < 0 \iff$
$\iff \nexists y \geq 0 : yA \geq 0,\ yb < 0$ $\square$



Jön a Farkas

Farkas-lemma: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$.
Avagy: tetsz. A mátrixra és b oszlopvektorra az $Ax \leq b$ ill.
$y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ közül pontosan egy megoldható.

Farkas-lemma néhány alakja:

1. $(\exists x : Ax = b) \iff (\nexists y : yA = 0, yb \neq 0)$
2. $(\exists x \geq 0 : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA \geq 0, yb < 0)$

Jön a Farkas

Farkas-lemma: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$.
Avagy: tetsz. A mátrixra és b oszlopvektorra az $Ax \leq b$ ill. $y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ közül pontosan egy megoldható.

Farkas-lemma néhány alakja:

1. $(\exists x : Ax = b) \iff (\nexists y : yA = 0, yb \neq 0)$
2. $(\exists x \geq 0 : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA \geq 0, yb < 0)$
3. $(\exists x \geq 0 : Ax = b) \iff (\nexists y : yA \geq 0, yb < 0)$

Jön a Farkas

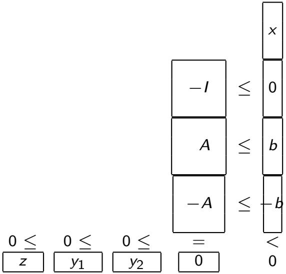
Farkas-lemma: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$.
Avagy: tetsz. A mátrixra és b oszlopvektorra az $Ax \leq b$ ill.
$y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ közül pontosan egy megoldható.

Farkas-lemma néhány alakja:

1. $(\exists x : Ax = b) \iff (\nexists y : yA = 0, yb \neq 0)$
2. $(\exists x \geq 0 : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA \geq 0, yb < 0)$
3. $(\exists x \geq 0 : Ax = b) \iff (\nexists y : yA \geq 0, yb < 0)$

Biz:

$\exists x \geq 0 : Ax = b \iff$
$\iff \exists x : -x \leq 0, Ax \leq b, -Ax \leq -b \iff$
$\iff \nexists z, y_1, y_2 \geq 0 : -z + y_1 A + y_2(-A) =$
$0, z \cdot 0 + y_1 b + y_2(-b) < 0 \iff$
$\iff \nexists y_1, y_2 \geq 0 :$
$(y_1 - y_2)A \geq 0, (y_1 - y_2)b < 0 \iff$
$\iff \nexists y : yA \geq 0, yb < 0$



Jön a Farkas

Farkas-lemma: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$.
Avagy: tetsz. A mátrixra és b oszlopvektorra az $Ax \leq b$ ill.
$y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ közül pontosan egy megoldható.
Farkas-lemma néhány alakja:
1. $(\exists x : Ax = b) \iff (\nexists y : yA = 0, yb \neq 0)$
2. $(\exists x \geq 0 : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA \geq 0, yb < 0)$
3. $(\exists x \geq 0 : Ax = b) \iff (\nexists y : yA \geq 0, yb < 0)$

Jön a Farkas

Farkas-lemma: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$.
Avagy: tetsz. A mátrixra és b oszlopvektorra az $Ax \leq b$ ill.
$y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ közül pontosan egy megoldható.
Farkas-lemma néhány alakja:
1. $(\exists x : Ax = b) \iff (\nexists y : yA = 0, yb \neq 0)$
2. $(\exists x \geq 0 : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA \geq 0, yb < 0)$
3. $(\exists x \geq 0 : Ax = b) \iff (\nexists y : yA \geq 0, yb < 0)$

A fenti bizonyításokban használt módszer segítségével bármely lineáris egyenlőtlenségrendszer esetén könnyen megadható egy, aa Farkas-lemmabelihez hasonló alternatív egyenlőtlenségrendszer úgy, hogy az eredeti és az alternatíva közül pontosan az egyik egyenlőtlenségrendszer legyen megoldható.

A lineáris programozási feladat

Példa: Olyan megoldását keressük a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 &\leq 10 \\ 7x_1 - 5x_2 - 3x_3 &\leq 22 \\ -3x_1 - 42x_2 &\leq -7 \end{aligned}$$

lineáris egyenlőtlenségredszernek, amire $x_2 \geq 0$ és emellett $3x_1 - 2x_2 + 13x_3$ a lehető legnagyobb. Formálisan: maximalizálni szeretnénk a $(3, -2, 13) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ skaláris szorzatot azon feltételek mellett, hogy $x_2 \geq 0$ és $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 7 & -5 & 3 \\ -3 & -42 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ -7 \end{pmatrix}$

A lineáris programozási feladat

Példa: Olyan megoldását keressük a

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 7x_2 & \leq & 10 \\ 7x_1 - 5x_2 - 3x_3 & \leq & 22 \\ -3x_1 - 42x_2 & \leq & -7 \end{array}$$

lineáris egyenlőtlenségredszernek, amire $x_2 \geq 0$ és emellett $3x_1 - 2x_2 + 13x_3$ a lehető legnagyobb. Formálisan: maximalizálni szeretnénk a $(3, -2, 13) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ skaláris szorzatot azon feltételek mellett, hogy $x_2 \geq 0$ és $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 7 & -5 & 3 \\ -3 & -42 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ -7 \end{pmatrix}$

Geometriailag: egy félterek metszeteként meghatározott konvex ponthalmaznak keressük azt az (x_1, x_2, x_3) pontját, amelyikre a $3x_1 - 2x_2 + 13x_3$ kifejezés maximális. A keresett ponto(ka)t úgy kapjuk, hogy a $(3, -2, 13)$ normálvektorú sík itt támasztja (a megfelelő irányból) a megoldások alkotta konvex halmazt.

A lineáris programozási feladat

Példa: Olyan megoldását keressük a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 &\leq 10 \\ 7x_1 - 5x_2 - 3x_3 &\leq 22 \\ -3x_1 - 42x_2 &\leq -7 \end{aligned}$$

lineáris egyenlőtlenségredszernek, amire $x_2 \geq 0$ és emellett $3x_1 - 2x_2 + 13x_3$ a lehető legnagyobb. Formálisan: maximalizálni szeretnénk a $(3, -2, 13) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ skaláris szorzatot azon feltételek mellett, hogy $x_2 \geq 0$ és $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 7 & -5 & 3 \\ -3 & -42 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ -7 \end{pmatrix}$

A lineáris programozási feladat

Példa: Olyan megoldását keressük a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 &\leq 10 \\ 7x_1 - 5x_2 - 3x_3 &\leq 22 \\ -3x_1 - 42x_2 &\leq -7 \end{aligned}$$

lineáris egyenlőtlenségredszernek, amire $x_2 \geq 0$ és emellett $3x_1 - 2x_2 + 13x_3$ a lehető legnagyobb. Formálisan: maximalizálni szeretnénk a $(3, -2, 13) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ skaláris szorzatot azon feltételek mellett, hogy $x_2 \geq 0$ és $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 7 & -5 & 3 \\ -3 & -42 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ -7 \end{pmatrix}$

Terminológia: Az egyenlő(tlen)ségek a **lineáris feltételek**, az $x_2 \geq 0$ követelmény neve **nemnegativitási feltétel**, a maximalizálandó/minimalizálandó mennyiség a **célfüggvény**. A **lineáris programozási (LP) feladat** pedig mindez együtt: egy célfüggvény bizonyos lineáris és esetleges nemnegativitási feltételek melletti optimalizálása (azaz maximalizálása vagy minimalizálása).

A lineáris programozási feladat

Terminológia: Az egyenlő(tlen)ségek a **lineáris feltételek**, az $x_2 \geq 0$ követelmény neve **nemnegativitási feltétel**, a maximalizálandó/minimalizálandó mennyiség a **célfüggvény**.
A **lineáris programozási (LP) feladat** pedig mindez együtt: egy célfüggvény bizonyos lineáris és esetleges nemnegativitási feltételek melletti optimalizálása (azaz maximalizálása vagy minimalizálása).

A lineáris programozási feladat

Terminológia: Az egyenlő(tlen)ségek a **lineáris feltételek**, az $x_2 \geq 0$ követelmény neve **nemnegativitási feltétel**, a maximalizálandó/minimalizálandó mennyiség a **célfüggvény**.
A **lineáris programozási (LP) feladat** pedig mindez együtt: egy célfüggvény bizonyos lineáris és esetleges nemnegativitási feltételek melletti optimalizálása (azaz maximalizálása vagy minimalizálása).
Általában, ha x a változók alkotta oszlopvektor, akkor az LP feladat úgy írható fel, hogy az Ax és a jobboldalakat tartamazó b oszlopvektor koordinátái között bizonyos egyenlőségek és egyenlőtlenségek vannak előírva, emellett követelmény még bizonyos változók nemnegativitása is. Mindezen követlemények mellett kell a cx célfüggvényt maximalizálni/minimalizálni.
Az **LP feladat sztenderd alakjában**
a lineáris feltételekben minden egyenlőtlenség azonos irányú.
Ha ezek $\leq$ típusúak, akkor a célfüggvényt maximalizálni,
ha pedig $\geq$ típusúak, akkor viszont minimalizálni kell.

A lineáris programozási feladat

Általában, ha x a változók alkotta oszlopvektor, akkor az LP feladat úgy írható fel, hogy az Ax és a jobboldalakat tartamazó b oszlopvektor koordinátái között bizonyos egyenlőségek és egyenlőtlenségek vannak előírva, emellett követelmény még bizonyos változók nemnegativitása is. Mindezen követlemények mellett kell a cx célfüggvényt maximalizálni/minimalizálni.
Az **LP feladat sztenderd alakjában**
a lineáris feltételekben minden egyenlőtlenség azonos irányú.
Ha ezek $\leq$ típusúak, akkor a célfüggvényt maximalizálni,
ha pedig $\geq$ típusúak, akkor viszont minimalizálni kell.

A lineáris programozási feladat

Általában, ha x a változók alkotta oszlopvektor, akkor az LP feladat úgy írható fel, hogy az Ax és a jobboldalakat tartamazó b oszlopvektor koordinátái között bizonyos egyenlőségek és egyenlőtlenségek vannak előírva, emellett követelmény még bizonyos változók nemnegativitása is. Mindezen követlemények mellett kell a cx célfüggvényt maximalizálni/minimalizálni.

Az **LP feladat sztenderd alakjában**

a lineáris feltételekben minden egyenlőtlenség azonos irányú.

Ha ezek $\leq$ típusúak, akkor a célfüggvényt maximalizálni,

ha pedig $\geq$ típusúak, akkor viszont minimalizálni kell.

Néhány sztenderd alakban megadott LP feladat:

(1) $\max\{cx : \ Ax \leq b\}$, (2) $\max\{cx : \ x \geq 0 \ Ax \leq b\}$,

(3) $\max\{cx : \ x \geq 0, \ Ax = b\}$, (4) $\min\{cx : \ Ax \geq b\}$,

(5) $\min\{yb : \ yA \geq c\}$, (6) $\min\{yb : \ y \geq 0 \ yA = c\}$

Mit tudunk egy ilyennel kezdeni?

A lineáris programozási feladat

Általában, ha x a változók alkotta oszlopvektor, akkor az LP feladat úgy írható fel, hogy az Ax és a jobboldalakat tartamazó b oszlopvektor koordinátái között bizonyos egyenlőségek és egyenlőtlenségek vannak előírva, emellett követelmény még bizonyos változók nemnegativitása is. Mindezen követlemények mellett kell a cx célfüggvényt maximalizálni/minimalizálni.

Az **LP feladat sztenderd alakjában**
a lineáris feltételekben minden egyenlőtlenség azonos irányú.
Ha ezek $\leq$ típusúak, akkor a célfüggvényt maximalizálni,
ha pedig $\geq$ típusúak, akkor viszont minimalizálni kell.
Néhány sztenderd alakban megadott LP feladat:

(1) $\max\{cx : \ Ax \leq b\}$, (2) $\max\{cx : \ x \geq 0 \ Ax \leq b\}$,
(3) $\max\{cx : \ x \geq 0, \ Ax = b\}$, (4) $\min\{cx : \ Ax \geq b\}$,
(5) $\min\{yb : \ yA \geq c\}$, (6) $\min\{yb : \ y \geq 0 \ yA = c\}$

Mit tudunk egy ilyennel kezdeni?
Egy másik, rokon LP feladat keresése a cél, ami valamilyen értelemben jellemzi az eredeti LP feladat optimumát.

Két rokon LP feladat

A $\max\{cx : Ax \leq b\}$ (primál) LP feladatot vizsgáljuk. Szorosan kapcsolódik ehhez a $\min\{yb : y \geq 0, yA = c\}$ (duális) LP feladat. Felírjuk a Farkas-lemma szerint az alábbi alternatívákat:

I. $\boxed{\exists x : Ax \leq b}$ $\leftrightarrow$ II. $\boxed{\exists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0}$

A. $\boxed{\exists x : Ax \geq 0, cx < 0}$ $\leftrightarrow$ B. $\boxed{\exists y \geq 0 : yA = c}$

Mindkét párból az egyik megoldható, a másik nem, így 4 eset van.

Két rokon LP feladat

A $\max\{cx : Ax \leq b\}$ (primál) LP feladatot vizsgáljuk. Szorosan kapcsolódik ehhez a $\min\{yb : y \geq 0, yA = c\}$ (duális) LP feladat.
Felírjuk a Farkas-lemma szerint az alábbi alternatívákat:

I.$\boxed{\exists x : Ax \leq b}$ $\leftrightarrow$ II.$\boxed{\exists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0}$

A.$\boxed{\exists x : Ax \geq 0, cx < 0}$ $\leftrightarrow$ B.$\boxed{\exists y \geq 0 : yA = c}$

Mindkét párból az egyik megoldható, a másik nem, így 4 eset van.

$\boxed{\text{I.A. eset}}$ $\nexists y \geq 0,\ yA = c$, és $\sup\{cx : Ax \leq b\} = \infty$.

Legyenek $Ax_0 \leq b$ és $Ax_1 \geq 0, cx_1 < 0$ az I. ill. az A. feladat megoldásai. Ekkor tetsz. $\lambda > 0$ esetén $x = x_0 - \lambda x_1$ megoldja I.-et:
$Ax = Ax_0 - \lambda Ax_1 \leq b - \lambda Ax_1 \leq b$, továbbá a célfüggvényértékre
$cx = cx_0 - \lambda cx_1 = cx_0 + \lambda(-cx_1)$ adódik.
Mivel $-cx_1 > 0$, ezért a λ növelésével tetsz. nagy célfüggvényérték elérhető: $\sup\{cx : Ax \leq b\} = \infty$.

Két rokon LP feladat

A $\max\{cx : Ax \leq b\}$ (primál) LP feladatot vizsgáljuk. Szorosan kapcsolódik ehhez a $\min\{yb : y \geq 0, yA = c\}$ (duális) LP feladat.
Felírjuk a Farkas-lemma szerint az alábbi alternatívákat:

I.$\boxed{\exists x : Ax \leq b}$ $\leftrightarrow$ II.$\boxed{\exists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0}$

A.$\boxed{\exists x : Ax \geq 0, cx < 0}$ $\leftrightarrow$ B.$\boxed{\exists y \geq 0 : yA = c}$

Mindkét párból az egyik megoldható, a másik nem, így 4 eset van.

$\boxed{\text{I.A. eset}}$ $\nexists y \geq 0,\ yA = c$, és $\sup\{cx : Ax \leq b\} = \infty$.

Két rokon LP feladat

A $\max\{cx : Ax \leq b\}$ (primál) LP feladatot vizsgáljuk. Szorosan kapcsolódik ehhez a $\min\{yb : y \geq 0, yA = c\}$ (duális) LP feladat. Felírjuk a Farkas-lemma szerint az alábbi alternatívákat:

I. $\boxed{\exists x : Ax \leq b}$ $\leftrightarrow$ II. $\boxed{\exists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0}$

A. $\boxed{\exists x : Ax \geq 0, cx < 0}$ $\leftrightarrow$ B. $\boxed{\exists y \geq 0 : yA = c}$

Mindkét párból az egyik megoldható, a másik nem, így 4 eset van.

$\boxed{\text{I.A. eset}}$ $\nexists y \geq 0,\ yA = c$, és $\sup\{cx : Ax \leq b\} = \infty$.

$\boxed{\text{II.B. eset}}$ $\nexists x : Ax \leq b$, és $\inf\{yb : y \geq 0,\ yA = c\} = -\infty$.

Legyenek $y_0 \geq 0,\ y_0A = c$ és $y_1 \geq 0,\ y_1A = 0,\ y_1b < 0$ a II. és B. megoldásai. Ekkor tetsz. $\lambda > 0$ esetén $y = y_0 + \lambda y_1$ megoldja B.-t:

$y = y_0 + \lambda y_1 \geq 0 + \lambda \cdot 0 = 0$, valamint

$yA = (y_0 + \lambda y_1)A = y_0A + \lambda y_1A = c + \lambda \cdot 0 = c$.

A célfüggvényértékre $yb = (y_0 + \lambda y_1)b = y_0b + \lambda(y_1b)$ adódik. Mivel $y_1b < 0$, ezért λ-t növelve a célfüggvényérték tetsz. kicsi lehet: $\inf\{yb : y \geq 0,\ yA = c\} = -\infty$.

Két rokon LP feladat

A $\max\{cx : Ax \leq b\}$ (primál) LP feladatot vizsgáljuk. Szorosan kapcsolódik ehhez a $\min\{yb : y \geq 0, yA = c\}$ (duális) LP feladat. Felírjuk a Farkas-lemma szerint az alábbi alternatívákat:

I. $\boxed{\exists x : Ax \leq b}$ $\leftrightarrow$ II. $\boxed{\exists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0}$

A. $\boxed{\exists x : Ax \geq 0, cx < 0}$ $\leftrightarrow$ B. $\boxed{\exists y \geq 0 : yA = c}$

Mindkét párból az egyik megoldható, a másik nem, így 4 eset van.

$\boxed{\text{I.A. eset}}$ $\nexists y \geq 0,\ yA = c$, és $\sup\{cx : Ax \leq b\} = \infty$.

$\boxed{\text{II.B. eset}}$ $\nexists x : Ax \leq b$, és $\inf\{yb : y \geq 0,\ yA = c\} = -\infty$.

Két rokon LP feladat

A $\max\{cx : Ax \leq b\}$ (primál) LP feladatot vizsgáljuk. Szorosan kapcsolódik ehhez a $\min\{yb : y \geq 0, yA = c\}$ (duális) LP feladat. Felírjuk a Farkas-lemma szerint az alábbi alternatívákat:

I.$\boxed{\exists x : Ax \leq b}$ $\leftrightarrow$ II.$\boxed{\exists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0}$

A.$\boxed{\exists x : Ax \geq 0, cx < 0}$ $\leftrightarrow$ B.$\boxed{\exists y \geq 0 : yA = c}$

Mindkét párból az egyik megoldható, a másik nem, így 4 eset van.

$\boxed{\text{I.A. eset}}$ $\nexists y \geq 0,\ yA = c$, és $\sup\{cx : Ax \leq b\} = \infty$.

$\boxed{\text{II.B. eset}}$ $\nexists x : Ax \leq b$, és $\inf\{yb : y \geq 0,\ yA = c\} = -\infty$.

$\boxed{\text{II.A. eset}}$ $\nexists x : Ax \leq b$, és $\nexists y \geq 0,\ yA = c$

Ekkor a cx és yb célfüggvények egyike sem vesz fel értéket, hisz sem a primál, sem a duál LP feladatnak nincs megoldása.

Két rokon LP feladat

A $\max\{cx : Ax \leq b\}$ (primál) LP feladatot vizsgáljuk. Szorosan kapcsolódik ehhez a $\min\{yb : y \geq 0, yA = c\}$ (duális) LP feladat.
Felírjuk a Farkas-lemma szerint az alábbi alternatívákat:

I. $\boxed{\exists x : Ax \leq b}$ $\leftrightarrow$ II. $\boxed{\exists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0}$

A. $\boxed{\exists x : Ax \geq 0, cx < 0}$ $\leftrightarrow$ B. $\boxed{\exists y \geq 0 : yA = c}$

Mindkét párból az egyik megoldható, a másik nem, így 4 eset van.

$\boxed{\text{I.A. eset}}$ $\nexists y \geq 0,\ yA = c$, és $\sup\{cx : Ax \leq b\} = \infty$.

$\boxed{\text{II.B. eset}}$ $\nexists x : Ax \leq b$, és $\inf\{yb : y \geq 0,\ yA = c\} = -\infty$.

$\boxed{\text{II.A. eset}}$ $\nexists x : Ax \leq b$, és $\nexists y \geq 0,\ yA = c$

Két rokon LP feladat

A $\max\{cx : Ax \le b\}$ (primál) LP feladatot vizsgáljuk. Szorosan kapcsolódik ehhez a $\min\{yb : y \ge 0, yA = c\}$ (duális) LP feladat.
Felírjuk a Farkas-lemma szerint az alábbi alternatívákat:

I. $\boxed{\exists x : Ax \le b}$ $\leftrightarrow$ II. $\boxed{\exists y \ge 0 : yA = 0, yb < 0}$

A. $\boxed{\exists x : Ax \ge 0, cx < 0}$ $\leftrightarrow$ B. $\boxed{\exists y \ge 0 : yA = c}$

Mindkét párból az egyik megoldható, a másik nem, így 4 eset van.

$\boxed{\text{I.A. eset}}$ $\nexists y \ge 0,\ yA = c$, és $\sup\{cx : Ax \le b\} = \infty$.

$\boxed{\text{II.B. eset}}$ $\nexists x : Ax \le b$, és $\inf\{yb : y \ge 0,\ yA = c\} = -\infty$.

$\boxed{\text{II.A. eset}}$ $\nexists x : Ax \le b$, és $\nexists y \ge 0,\ yA = c$

$\boxed{\text{I.B. eset}}$ Mindkét LP-nek van megoldása. Itt egy újabb Farkas-pár:

$\boxed{\exists x : Ax \le b, -cx \le -p} \leftrightarrow \boxed{\exists y \ge 0, \exists \lambda \ge 0 : yA - c\lambda = 0, yb - \lambda p < 0}$

Utóbbi $\lambda = 0$-ra nem megoldható (II. LP). Feltehető, hogy $\lambda = 1$:

$\boxed{\exists x : Ax \le b,\ cx \ge p}$ $\leftrightarrow$ $\boxed{\exists y \ge 0 : yA = c, yb < p}$

Két rokon LP feladat

A $\max\{cx : Ax \leq b\}$ (primál) LP feladatot vizsgáljuk. Szorosan kapcsolódik ehhez a $\min\{yb : y \geq 0, yA = c\}$ (duális) LP feladat.
Felírjuk a Farkas-lemma szerint az alábbi alternatívákat:

I.$\boxed{\exists x : Ax \leq b}$ $\leftrightarrow$ II.$\boxed{\exists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0}$

A.$\boxed{\exists x : Ax \geq 0, cx < 0}$ $\leftrightarrow$ B.$\boxed{\exists y \geq 0 : yA = c}$

Mindkét párból az egyik megoldható, a másik nem, így 4 eset van.

$\boxed{\text{I.A. eset}}$ $\nexists y \geq 0,\ yA = c$, és $\sup\{cx : Ax \leq b\} = \infty$.

$\boxed{\text{II.B. eset}}$ $\nexists x : Ax \leq b$, és $\inf\{yb : y \geq 0,\ yA = c\} = -\infty$.

$\boxed{\text{II.A. eset}}$ $\nexists x : Ax \leq b$, és $\nexists y \geq 0,\ yA = c$

$\boxed{\text{I.B. eset}}$ Mindkét LP-nek van megoldása. Itt egy újabb Farkas-pár:

$\boxed{\exists x : Ax \leq b, -cx \leq -p} \leftrightarrow \boxed{\exists y \geq 0, \exists \lambda \geq 0 : yA - c\lambda = 0, yb - \lambda p < 0}$

Utóbbi $\lambda = 0$-ra nem megoldható (II. LP). Feltehető, hogy $\lambda = 1$:

$\boxed{\exists x : Ax \leq b,\ cx \geq p}$ $\leftrightarrow$ $\boxed{\exists y \geq 0 : yA = c, yb < p}$

Tetszőleges p célfüggvényértéket pontosan az egyik LP éri el, és[1]
$\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$ adódik. □

---

[1] nem részletezett folytonossági meggondolások alapján

Két rokon LP feladat

A $\max\{cx : Ax \leq b\}$ (primál) LP feladatot vizsgáljuk. Szorosan kapcsolódik ehhez a $\min\{yb : y \geq 0, yA = c\}$ (duális) LP feladat. Felírjuk a Farkas-lemma szerint az alábbi alternatívákat:

I. $\boxed{\exists x : Ax \leq b}$ $\leftrightarrow$ II. $\boxed{\exists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0}$

A. $\boxed{\exists x : Ax \geq 0, cx < 0}$ $\leftrightarrow$ B. $\boxed{\exists y \geq 0 : yA = c}$

Mindkét párból az egyik megoldható, a másik nem, így 4 eset van.

$\boxed{\text{I.A. eset}}$ $\nexists y \geq 0,\ yA = c$, és $\sup\{cx : Ax \leq b\} = \infty$.

$\boxed{\text{II.B. eset}}$ $\nexists x : Ax \leq b$, és $\inf\{yb : y \geq 0,\ yA = c\} = -\infty$.

$\boxed{\text{II.A. eset}}$ $\nexists x : Ax \leq b$, és $\nexists y \geq 0,\ yA = c$

$\boxed{\text{I.B. eset}}$ Mindkét LP-nek van megoldása. Itt egy újabb Farkas-pár:

$\boxed{\exists x : Ax \leq b, -cx \leq -p} \leftrightarrow \boxed{\exists y \geq 0, \exists \lambda \geq 0 : yA - c\lambda = 0, yb - \lambda p < 0}$

Utóbbi $\lambda = 0$-ra nem megoldható (II. LP). Feltehető, hogy $\lambda = 1$:

$\boxed{\exists x : Ax \leq b,\ cx \geq p}$ $\leftrightarrow$ $\boxed{\exists y \geq 0 : yA = c, yb < p}$

Tetszőleges p célfüggvényértéket pontosan az egyik LP éri el, és[1] $\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$ adódik. $\square$

A következő oldalon összfoglaljuk, amit most tanultunk.

---

[1] nem részletezett folytonossági meggondolások alapján

A lineáris programozás dualitástétele

Dualitás tétel: Tetszőleges $\max\{cx : Ax \leq b\}$ primál LP feladathoz felírható a $\min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$ duális DLP feladat. Ekkor az alábbi 4 eset közül pontosan az egyik következik be.

I. Az LP és DLP-beli egyenlőtlenségrendszer sem megoldható.

II. Az LP egyenlőtlenségrendszere megoldható, a DLP-é nem, az LP (maximalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos felülről.

III. A DLP egyenlőtlenségrendszere megoldható, az LP-é nem, a DLP (minimalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos alulról.

IV. Mindkét egyenlőtlenségrendszer megoldható, az optimumérték közös: $\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$. $\square$

A lineáris programozás dualitástétele

Dualitás tétel: Tetszőleges $\max\{cx : Ax \leq b\}$ primál LP feladathoz felírható a $\min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$ duális DLP feladat. Ekkor az alábbi 4 eset közül pontosan az egyik következik be.

I. Az LP és DLP-beli egyenlőtlenségrendszer sem megoldható.

II. Az LP egyenlőtlenségrendszere megoldható, a DLP-é nem, az LP (maximalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos felülről.

III. A DLP egyenlőtlenségrendszere megoldható, az LP-é nem, a DLP (minimalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos alulról.

IV. Mindkét egyenlőtlenségrendszer megoldható, az optimumérték közös: $\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$. $\square$

Megf: Ha x a primál, y pedig a duál feladat megoldása, akkor
(1) $cx = (yA)x = y(Ax) \leq yb$

A lineáris programozás dualitástétele

Dualitás tétel: Tetszőleges $\max\{cx : Ax \leq b\}$ primál LP feladathoz felírható a $\min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$ duális DLP feladat. Ekkor az alábbi 4 eset közül pontosan az egyik következik be.

I. Az LP és DLP-beli egyenlőtlenségrendszer sem megoldható.

II. Az LP egyenlőtlenségrendszere megoldható, a DLP-é nem, az LP (maximalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos felülről.

III. A DLP egyenlőtlenségrendszere megoldható, az LP-é nem, a DLP (minimalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos alulról.

IV. Mindkét egyenlőtlenségrendszer megoldható, az optimumérték közös: $\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$. $\square$

Megf: Ha x a primál, y pedig a duál feladat megoldása, akkor

(1) $cx = (yA)x = y(Ax) \leq yb$, ill.

(2) (optimalitási kritérium) $cx = yb$ esetén x és y opt megoldások.

A lineáris programozás dualitástétele

Dualitás tétel: Tetszőleges $\max\{cx : Ax \leq b\}$ primál LP feladathoz felírható a $\min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$ duális DLP feladat. Ekkor az alábbi 4 eset közül pontosan az egyik következik be.

I. Az LP és DLP-beli egyenlőtlenségrendszer sem megoldható.

II. Az LP egyenlőtlenségrendszere megoldható, a DLP-é nem, az LP (maximalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos felülről.

III. A DLP egyenlőtlenségrendszere megoldható, az LP-é nem, a DLP (minimalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos alulról.

IV. Mindkét egyenlőtlenségrendszer megoldható, az optimumérték közös: $\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$. $\square$

Megf: Ha x a primál, y pedig a duál feladat megoldása, akkor

(1) $cx = (yA)x = y(Ax) \leq yb$, ill.

(2) (optimalitási kritérium) $cx = yb$ esetén x és y opt megoldások.

Költői kérdés: Láttunk már ilyet valahol???

A lineáris programozás dualitástétele

Dualitás tétel: Tetszőleges $\max\{cx : Ax \leq b\}$ primál LP feladathoz felírható a $\min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$ duális DLP feladat. Ekkor az alábbi 4 eset közül pontosan az egyik következik be.

I. Az LP és DLP-beli egyenlőtlenségrendszer sem megoldható.

II. Az LP egyenlőtlenségrendszere megoldható, a DLP-é nem, az LP (maximalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos felülről.

III. A DLP egyenlőtlenségrendszere megoldható, az LP-é nem, a DLP (minimalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos alulról.

IV. Mindkét egyenlőtlenségrendszer megoldható, az optimumérték közös: $\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$. $\square$

Megf: Ha x a primál, y pedig a duál feladat megoldása, akkor

(1) $cx = (yA)x = y(Ax) \leq yb$, ill.

(2) (optimalitási kritérium) $cx = yb$ esetén x és y opt megoldások.

A lineáris programozás dualitástétele

Dualitás tétel: Tetszőleges $\max\{cx : Ax \leq b\}$ primál LP feladathoz felírható a $\min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$ duális DLP feladat. Ekkor az alábbi 4 eset közül pontosan az egyik következik be.

I. Az LP és DLP-beli egyenlőtlenségrendszer sem megoldható.

II. Az LP egyenlőtlenségrendszere megoldható, a DLP-é nem, az LP (maximalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos felülről.

III. A DLP egyenlőtlenségrendszere megoldható, az LP-é nem, a DLP (minimalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos alulról.

IV. Mindkét egyenlőtlenségrendszer megoldható, az optimumérték közös: $\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$. $\square$

Megf: Ha x a primál, y pedig a duál feladat megoldása, akkor

(1) $cx = (yA)x = y(Ax) \leq yb$, ill.

(2) (optimalitási kritérium) $cx = yb$ esetén x és y opt megoldások.

Megj: A Dualitás tétel pontosan azt mondja ki, hogy ha a primál LP és a duális DLP is megoldható, akkor vannak olyan x és y megoldásaik, amikre a fenti optimalitási kritérium megvalósul.

A lineáris programozás dualitástétele

Dualitás tétel: Tetszőleges $\max\{cx : Ax \leq b\}$ primál LP feladathoz felírható a $\min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$ duális DLP feladat. Ekkor az alábbi 4 eset közül pontosan az egyik következik be.

I. Az LP és DLP-beli egyenlőtlenségrendszer sem megoldható.

II. Az LP egyenlőtlenségrendszere megoldható, a DLP-é nem, az LP (maximalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos felülről.

III. A DLP egyenlőtlenségrendszere megoldható, az LP-é nem, a DLP (minimalizálandó) célfüggvényértéke nem korlátos alulról.

IV. Mindkét egyenlőtlenségrendszer megoldható, az optimumérték közös: $\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : y \geq 0,\ yA = c\}$. □

Megf: Ha x a primál, y pedig a duál feladat megoldása, akkor
(1) $cx = (yA)x = y(Ax) \leq yb$, ill.
(2) (optimalitási kritérium) $cx = yb$ esetén x és y opt megoldások.

Megj: A Dualitás tétel pontosan azt mondja ki, hogy ha a primál LP és a duális DLP is megoldható, akkor vannak olyan x és y megoldásaik, amikre a fenti optimalitási kritérium megvalósul.

Kínzó kérdések: (1) Bármely LP feladathoz lehet duálist képezni?
(2) Van az LP feladat megoldására hatékony eljárás?

Duális LP feladat felírása

Dualizálási ökölszabályok

(0) Ne szégyelljünk szamárvezetőt használni.
(1) Az LP és DLP feladatot sztenderd alakban írjuk fel.
(2) Az LP ill. DLP egyikében maximalizálunk, a másikban minimalizálunk.
(3) Duális változók a primál feltételeknek, a duális feltételek a primál változóknak felelnek meg.
(4) Nemnegatív változókhoz egyenlőtlenségek, előjelkötetlen változókhoz egyenlőségek tartoznak mindkét relációban.
(5) A primál célfüggvény együtthatók a duál konstansokat, a primál konstansok a duál célfüggvény együtthatóit határozzák meg.
(6) Az így kapott primál/duál feladat is sztenderd alakban lesz felírva.

Duális LP feladat felírása

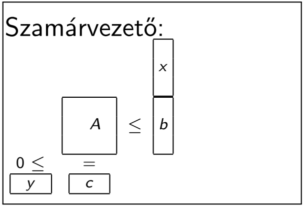
Dualizálási ökölszabályok

(0) Ne szégyelljünk szamárvezetőt használni.
(1) Az LP és DLP feladatot sztenderd alakban írjuk fel.
(2) Az LP ill. DLP egyikében maximalizálunk, a másikban minimalizálunk.
(3) Duális változók a primál feltételeknek, a duális feltételek a primál változóknak felelnek meg.
(4) Nemnegatív változókhoz egyenlőtlenségek, előjelkötetlen változókhoz egyenlőségek tartoznak mindkét relációban.
(5) A primál célfüggvény együtthatók a duál konstansokat, a primál konstansok a duál célfüggvény együtthatóit határozzák meg.
(6) Az így kapott primál/duál feladat is sztenderd alakban lesz felírva.

Példa:

LP:
$$\max cx$$
$$Ax \leq b$$

DLP:
$$\min yb$$
$$y \geq 0$$
$$yA = c$$



Duális LP feladat felírása

Dualizálási ökölszabályok

(0) Ne szégyelljünk szamárvezetőt használni.
(1) Az LP és DLP feladatot sztenderd alakban írjuk fel.
(2) Az LP ill. DLP egyikében maximalizálunk, a másikban minimalizálunk.
(3) Duális változók a primál feltételeknek, a duális feltételek a primál változóknak felelnek meg.
(4) Nemnegatív változókhoz egyenlőtlenségek, előjelkötetlen változókhoz egyenlőségek tartoznak mindkét relációban.
(5) A primál célfüggvény együtthatók a duál konstansokat, a primál konstansok a duál célfüggvény együtthatóit határozzák meg.
(6) Az így kapott primál/duál feladat is sztenderd alakban lesz felírva.

Példa:

Duális LP feladat felírása

Dualizálási ökölszabályok

(0) Ne szégyelljünk szamárvezetőt használni.
(1) Az LP és DLP feladatot sztenderd alakban írjuk fel.
(2) Az LP ill. DLP egyikében maximalizálunk, a másikban minimalizálunk.
(3) Duális változók a primál feltételeknek, a duális feltételek a primál változóknak felelnek meg.
(4) Nemnegatív változókhoz egyenlőtlenségek, előjelkötetlen változókhoz egyenlőségek tartoznak mindkét relációban.
(5) A primál célfüggvény együtthatók a duál konstansokat, a primál konstansok a duál célfüggvény együtthatóit határozzák meg.
(6) Az így kapott primál/duál feladat is sztenderd alakban lesz felírva.

Példa:

$$\max 2x_1 - x_2$$

$$x_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 7 \\ 5x_1 - 7x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Duális LP feladat felírása

Dualizálási ökölszabályok

(0) Ne szégyelljünk szamárvezetőt használni.
(1) Az LP és DLP feladatot sztenderd alakban írjuk fel.
(2) Az LP ill. DLP egyikében maximalizálunk, a másikban minimalizálunk.
(3) Duális változók a primál feltételeknek, a duális feltételek a primál változóknak felelnek meg.
(4) Nemnegatív változókhoz egyenlőtlenségek, előjelkötetlen változókhoz egyenlőségek tartoznak mindkét relációban.
(5) A primál célfüggvény együtthatók a duál konstansokat, a primál konstansok a duál célfüggvény együtthatóit határozzák meg.
(6) Az így kapott primál/duál feladat is sztenderd alakban lesz felírva.

Példa:

$$\max 2x_1 - x_2$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &\geq 0 \\
3x_1 + x_2 &\leq 7 \\
5x_1 - 7x_2 &= 3
\end{aligned}
$$

Szamárvezető:

$$
\begin{array}{cc|c|c}
 & & & x_1 \\
 & & 0 \leq & x_2 \\
3 & 1 & \leq & 7 \\
5 & -7 & = & 3 \\
 & & & \\
2 & -1 & &
\end{array}
$$

Duális LP feladat felírása

Dualizálási ökölszabályok

(0) Ne szégyelljünk szamárvezetőt használni.
(1) Az LP és DLP feladatot sztenderd alakban írjuk fel.
(2) Az LP ill. DLP egyikében maximalizálunk, a másikban minimalizálunk.
(3) Duális változók a primál feltételeknek, a duális feltételek a primál változóknak felelnek meg.
(4) Nemnegatív változókhoz egyenlőtlenségek, előjelkötetlen változókhoz egyenlőségek tartoznak mindkét relációban.
(5) A primál célfüggvény együtthatók a duál konstansokat,
a primál konstansok a duál célfüggvény együtthatóit határozzák meg.
(6) Az így kapott primál/duál feladat is sztenderd alakban lesz felírva.

Példa:

$$\max 2x_1 - x_2$$

$$\begin{array}{rcl} x_2 \geq 0 & & \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 7 \\ 5x_1 - 7x_2 & = & 3 \end{array}$$

Szamárvezető:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & x_1 \\ & & & 0 \leq & x_2 \\ & & \boxed{\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 5 & -7 \end{array}} & \begin{array}{c} \leq \\ = \end{array} & \begin{array}{c} 7 \\ 3 \end{array} \\ 0 \leq & & = \quad \geq & & \\ y_1 & y_2 & 2 \quad -1 & & \end{array}$$

Duális LP feladat felírása

Dualizálási ökölszabályok

(0) Ne szégyelljünk szamárvezetőt használni.
(1) Az LP és DLP feladatot sztenderd alakban írjuk fel.
(2) Az LP ill. DLP egyikében maximalizálunk, a másikban minimalizálunk.
(3) Duális változók a primál feltételeknek, a duális feltételek a primál változóknak felelnek meg.
(4) Nemnegatív változókhoz egyenlőtlenségek, előjelkötetlen változókhoz egyenlőségek tartoznak mindkét relációban.
(5) A primál célfüggvény együtthatók a duál konstansokat,
a primál konstansok a duál célfüggvény együtthatóit határozzák meg.
(6) Az így kapott primál/duál feladat is sztenderd alakban lesz felírva.

Példa:

$$\max 2x_1 - x_2$$

$$\begin{array}{rcl} x_2 \geq 0 & & \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 7 \\ 5x_1 - 7x_2 & = & 3 \end{array}$$

Szamárvezető:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & x_1 \\ & & & & 0 \leq & x_2 \\ & & 3 & 1 & \leq & 7 \\ & & 5 & -7 & = & 3 \\ 0 \leq & & = & \geq & & \\ y_1 & y_2 & 2 & -1 & & \end{array}$$

$$\min 7y_1 + 3y_2$$

$$\begin{array}{rcl} y_1 \geq 0 & & \\ 3y_1 + 5y_2 & = & 2 \\ y_1 - 7y_2 & \geq & -1 \end{array}$$

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- Lineáris egyenlőtlenségrendszer félterek metszetének felel meg egy többdimenziós térben.

Mit tanultunk ma?

- Lineáris egyenlőtlenségrendszer félterek metszetének felel meg egy többdimenziós térben.
- Tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszer átírható $Ax \leq b$ alakba, ezáltal tetszőleges linéris egyenlőtlenségrendszerhez felírható egy Farkas-lemma szerinti alternatíva.

Mit tanultunk ma?

- Lineáris egyenlőtlenségrendszer félterek metszetének felel meg egy többdimenziós térben.
- Tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszer átírható $Ax \leq b$ alakba, ezáltal tetszőleges lináris egyenlőtlenségrendszerhez felírható egy Farkas-lemma szerinti alternatíva.
- A lineáris programozási (LP) feladatban lineáris és nemnegativitási feltételek teljesülése mellett kell optimializálni egy lineáris célfüggvényt.

Mit tanultunk ma?

- Lineáris egyenlőtlenségrendszer félterek metszetének felel meg egy többdimenziós térben.
- Tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszer átírható $Ax \leq b$ alakba, ezáltal tetszőleges lináris egyenlőtlenségrendszerhez felírható egy Farkas-lemma szerinti alternatíva.
- A lineáris programozási (LP) feladatban lineáris és nemnegativitási feltételek teljesülése mellett kell optimializálni egy lineáris célfüggvényt.
- Minden sztenderd alakban megadott LP feladathoz az ökölszabályok segítségével felírható a duális (DLP) feladat.

Mit tanultunk ma?

- Lineáris egyenlőtlenségrendszer félterek metszetének felel meg egy többdimenziós térben.
- Tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszer átírható $Ax \leq b$ alakba, ezáltal tetszőleges lináris egyenlőtlenségrendszerhez felírható egy Farkas-lemma szerinti alternatíva.
- A lineáris programozási (LP) feladatban lineáris és nemnegativitási feltételek teljesülése mellett kell optimializálni egy lineáris célfüggvényt.
- Minden sztenderd alakban megadott LP feladathoz az ökölszabályok segítségével felírható a duális (DLP) feladat.
- A dualitás tétel szerint ha az LP és a DLP is megoldhatók, akkor az optimális célfüggvényértékeik megegyeznek. Ha csak az egyik oldható meg, akkor a hozzá tartozó célfüggvényérték nem korlátos, a megoldások között nincs optimális.

Mit tanultunk ma?

- Lineáris egyenlőtlenségrendszer félterek metszetének felel meg egy többdimenziós térben.
- Tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszer átírható $Ax \leq b$ alakba, ezáltal tetszőleges lináris egyenlőtlenségrendszerhez felírható egy Farkas-lemma szerinti alternatíva.
- A lineáris programozási (LP) feladatban lineáris és nemnegativitási feltételek teljesülése mellett kell optimializálni egy lineáris célfüggvényt.
- Minden sztenderd alakban megadott LP feladathoz az ökölszabályok segítségével felírható a duális (DLP) feladat.
- A dualitás tétel szerint ha az LP és a DLP is megoldhatók, akkor az optimális célfüggvényértékeik megegyeznek. Ha csak az egyik oldható meg, akkor a hozzá tartozó célfüggvényérték nem korlátos, a megoldások között nincs optimális.
- Ez fordítva is igaz: ha egy LP ill. DLP megoldáshoz ugyanaz a célfüggvényérték tartozik, akkor ezek optimális megoldások.

Mit tanultunk ma?

- Lineáris egyenlőtlenségrendszer félterek metszetének felel meg egy többdimenziós térben.
- Tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszer átírható $Ax \leq b$ alakba, ezáltal tetszőleges lináris egyenlőtlenségrendszerhez felírható egy Farkas-lemma szerinti alternatíva.
- A lineáris programozási (LP) feladatban lineáris és nemnegativitási feltételek teljesülése mellett kell optimializálni egy lineáris célfüggvényt.
- Minden sztenderd alakban megadott LP feladathoz az ökölszabályok segítségével felírható a duális (DLP) feladat.
- A dualitás tétel szerint ha az LP és a DLP is megoldhatók, akkor az optimális célfüggvényértékeik megegyeznek. Ha csak az egyik oldható meg, akkor a hozzá tartozó célfüggvényérték nem korlátos, a megoldások között nincs optimális.
- Ez fordítva is igaz: ha egy LP ill. DLP megoldáshoz ugyanaz a célfüggvényérték tartozik, akkor ezek optimális megoldások.

Ennyi!