Felsőbb matematika villamosmérnököknek – Kombinatorikus optimalizálás

IP feladatok, Ford-Fulkerson-tétel

2020. március 24.

Hol is tartunk

- Elméletileg meg tudunk oldani lineáris egyenlőtlenségrendszereket Fourier-Motzkin eliminációval.

Hol is tartunk

- Elméletileg meg tudunk oldani lineáris egyenlőtlenségrendszereket Fourier-Motzkin eliminációval.
- A Farkas-lemma alapján minden lineáris egyenlőtlenségrendszerhez könnyen kaphatunk egy másikat úgy, hogy a két rendszer közül pontosan az egyik megoldható.

Hol is tartunk

- Elméletileg meg tudunk oldani lineáris egyenlőtlenségrendszereket Fourier-Motzkin eliminációval.
- A Farkas-lemma alapján minden lineáris egyenlőtlenségrendszerhez könnyen kaphatunk egy másikat úgy, hogy a két rendszer közül pontosan az egyik megoldható.
- Definiáltuk az LP feladatot: lineáris egyenlőtlenségrendszernek olyan megoldását keressük, amelyik optimalizál (minimalizál vagy maximalizál) egy lineáris célfüggvényt,

Hol is tartunk

- Elméletileg meg tudunk oldani lineáris egyenlőtlenségrendszereket Fourier-Motzkin eliminációval.
- A Farkas-lemma alapján minden lineáris egyenlőtlenségrendszerhez könnyen kaphatunk egy másikat úgy, hogy a két rendszer közül pontosan az egyik megoldható.
- Definiáltuk az LP feladatot: lineáris egyenlőtlenségrendszernek olyan megoldását keressük, amelyik optimalizál (minimalizál vagy maximalizál) egy lineáris célfüggvényt,
- Öt ökölszabály segítségével fel tudjuk írni a sztenderd LP duálisát (DLP-t). Jól jön ehhez a szamárvezető.

Hol is tartunk

- Elméletileg meg tudunk oldani lineáris egyenlőtlenségrendszereket Fourier-Motzkin eliminációval.
- A Farkas-lemma alapján minden lineáris egyenlőtlenségrendszerhez könnyen kaphatunk egy másikat úgy, hogy a két rendszer közül pontosan az egyik megoldható.
- Definiáltuk az LP feladatot: lineáris egyenlőtlenségrendszernek olyan megoldását keressük, amelyik optimalizál (minimalizál vagy maximalizál) egy lineáris célfüggvényt,
- Öt ökölszabály segítségével fel tudjuk írni a sztenderd LP duálisát (DLP-t). Jól jön ehhez a szamárvezető.
- Dualitástételt: ha az LP és DLP valamelyike nem megoldható, akkor a másik célfüggvényértéke nem korlátos. Ha mindkettő megoldható, akkor mindkét célfüggvényérték korlátos, van minimum ill. maximum, és ezek értéke megegyezik.

Hol is tartunk

- Elméletileg meg tudunk oldani lineáris egyenlőtlenségrendszereket Fourier-Motzkin eliminációval.
- A Farkas-lemma alapján minden lineáris egyenlőtlenségrendszerhez könnyen kaphatunk egy másikat úgy, hogy a két rendszer közül pontosan az egyik megoldható.
- Definiáltuk az LP feladatot: lineáris egyenlőtlenségrendszernek olyan megoldását keressük, amelyik optimalizál (minimalizál vagy maximalizál) egy lineáris célfüggvényt,
- Öt ökölszabály segítségével fel tudjuk írni a sztenderd LP duálisát (DLP-t). Jól jön ehhez a szamárvezető.
- Dualitástételt: ha az LP és DLP valamelyike nem megoldható, akkor a másik célfüggvényértéke nem korlátos. Ha mindkettő megoldható, akkor mindkét célfüggvényérték korlátos, van minimum ill. maximum, és ezek értéke megegyezik.
- IP és DIP feladatra $\max \ldots \leq \min \ldots$, de nincs dualitástétel.

Hol is tartunk

- Elméletileg meg tudunk oldani lineáris egyenlőtlenségrendszereket Fourier-Motzkin eliminációval.
- A Farkas-lemma alapján minden lineáris egyenlőtlenségrendszerhez könnyen kaphatunk egy másikat úgy, hogy a két rendszer közül pontosan az egyik megoldható.
- Definiáltuk az LP feladatot: lineáris egyenlőtlenségrendszernek olyan megoldását keressük, amelyik optimalizál (minimalizál vagy maximalizál) egy lineáris célfüggvényt,
- Öt ökölszabály segítségével fel tudjuk írni a sztenderd LP duálisát (DLP-t). Jól jön ehhez a szamárvezető.
- Dualitástételt: ha az LP és DLP valamelyike nem megoldható, akkor a másik célfüggvényértéke nem korlátos. Ha mindkettő megoldható, akkor mindkét célfüggvényérték korlátos, van minimum ill. maximum, és ezek értéke megegyezik.
- IP és DIP feladatra $\max \ldots \leq \min \ldots$, de nincs dualitástétel.
- páros gráf ill. irányított gráf incidenciamátrixa TU.

Hol is tartunk

- Elméletileg meg tudunk oldani lineáris egyenlőtlenségrendszereket Fourier-Motzkin eliminációval.
- A Farkas-lemma alapján minden lineáris egyenlőtlenségrendszerhez könnyen kaphatunk egy másikat úgy, hogy a két rendszer közül pontosan az egyik megoldható.
- Definiáltuk az LP feladatot: lineáris egyenlőtlenségrendszernek olyan megoldását keressük, amelyik optimalizál (minimalizál vagy maximalizál) egy lineáris célfüggvényt,
- Öt ökölszabály segítségével fel tudjuk írni a sztenderd LP duálisát (DLP-t). Jól jön ehhez a szamárvezető.
- Dualitástételt: ha az LP és DLP valamelyike nem megoldható, akkor a másik célfüggvényértéke nem korlátos. Ha mindkettő megoldható, akkor mindkét célfüggvényérték korlátos, van minimum ill. maximum, és ezek értéke megegyezik.
- IP és DIP feladatra $\max \ldots \leq \min \ldots$, de nincs dualitástétel.
- páros gráf ill. irányított gráf incidenciamátrixa TU.
- TU mátrix esetén van egész LP ill. DLP optimum.

LP vagy IP

Azt fogjuk látni, hogy bár az LP/DLP sok mindenre alkalmas, de a gyakorlatban sokszor egész értékű optimumot keresünk, ezért IP-vel/DIP-vel kell dolgozni. Mindkét típusra vannak működő algoritmusok, programcsomagok, de lényeges különbség van a két probléma között.

LP vagy IP

Azt fogjuk látni, hogy bár az LP/DLP sok mindenre alkalmas, de a gyakorlatban sokszor egész értékű optimumot keresünk, ezért IP-vel/DIP-vel kell dolgozni. Mindkét típusra vannak működő algoritmusok, programcsomagok, de lényeges különbség van a két probléma között.

LP/DLP esetén van garantáltan polinomidejű algoritmus, ami a gyakorlatban kicsit ügyetlen. Ezzel szemben számos algoritmus -bár nem polinomidejű- pazarul működik. (Szimplex módszer változatai, belső pontos módszerek, criss-cross módszer . . .) Ezért az egészen nagyméretű (sokváltozós, rengeteg egyenlőtlenségből álló) problémák is jól kezelhetők a gyakorlatban.

LP vagy IP

Azt fogjuk látni, hogy bár az LP/DLP sok mindenre alkalmas, de a gyakorlatban sokszor egész értékű optimumot keresünk, ezért IP-vel/DIP-vel kell dolgozni. Mindkét típusra vannak működő algoritmusok, programcsomagok, de lényeges különbség van a két probléma között.

IP/DIP esetén a probléma bizonyítottan reménytelen (NP-teljes problémát tartalmaz), így nem várható rá hatékony algoritmus. Vannak hasznos módszerek (branch and bound, branch and cut, vágósíkos módszerek, Lagrange-relaxáció, oszlopgenerálás, ...), de ezek nagy feladatokon nehezen boldogulnak. Ismert jópár heurisztika, ami sokat segíthet, de igazán jól működők egy-egy cég szigorúan őrzött tudásbázisát képezik. A gyakorlatban sok múlhat azon, hogyan formalizáljuk a feladatot. Érdemes lehet nem egész változókat is megengedni és az egészértékűségi feltételek számát alacsonyan tartani. IP megoldó algoritmusokra nincsenek értelmes lépésszámgaranciák: ezekről tapasztalati alapokon ,,tudjuk" hogy jól vagy rosszul működnek egy-egy feladattípusra.

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkalmazásával.

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkalmazásával.
A folyamproblémát a (G, s, t, c) négyes határozza meg: G irányított gráf, s, t terminálok (termelő, fogyasztó), c pedig az élek nemnegatív kapacitása. A folyamot (most) x jelöli: ez minden e élhez hozzárendeli a rajta folyó $x(e)$ folyamértéket.

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkalmazásával.

A folyamproblémát a (G, s, t, c) négyes határozza meg: G irányított gráf, s, t terminálok (termelő, fogyasztó), c pedig az élek nemnegatív kapacitása. A folyamot (most) x jelöli: ez minden e élhez hozzárendeli a rajta folyó $x(e)$ folyamértéket.

A folyam definíciója szerint x-re az alábbiaknak kell teljesülni:

$x(e) \geq 0 \ \forall e \in E(G)$ nemnegativitás

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkalmazásával.

A folyamproblémát a (G, s, t, c) négyes határozza meg: G irányított gráf, s, t terminálok (termelő, fogyasztó), c pedig az élek nemnegatív kapacitása. A folyamot (most) x jelöli: ez minden e élhez hozzárendeli a rajta folyó $x(e)$ folyamértéket.

A folyam definíciója szerint x-re az alábbiaknak kell teljesülni:

$x(e) \geq 0 \ \forall e \in E(G)$ nemnegativitás

$x(e) \leq c(e) \ \forall e \in E(G)$ kapacitásfeltétel

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkalmazásával.

A folyamproblémát a (G, s, t, c) négyes határozza meg: G irányított gráf, s, t terminálok (termelő, fogyasztó), c pedig az élek nemnegatív kapacitása. A folyamot (most) x jelöli: ez minden e élhez hozzárendeli a rajta folyó $x(e)$ folyamértéket.

A folyam definíciója szerint x-re az alábbiaknak kell teljesülni:

$x(e) \geq 0 \ \forall e \in E(G)$ nemnegativitás

$x(e) \leq c(e) \ \forall e \in E(G)$ kapacitásfeltétel

$\tilde{c}(E_{ki}(v)) - \tilde{c}(E_{be}(v)) = 0 \ \forall v \neq s, t$ Kirchhoff-szabály

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkamazásával.

A folyamproblémát a (G, s, t, c) négyes határozza meg: G irányított gráf, s, t terminálok (termelő, fogyasztó), c pedig az élek nemnegatív kapacitása. A folyamot (most) x jelöli: ez minden e élhez hozzárendeli a rajta folyó $x(e)$ folyamértéket.

A folyam definíciója szerint x-re az alábbiaknak kell teljesülni:

$x(e) \geq 0 \ \forall e \in E(G)$ nemnegativitás

$x(e) \leq c(e) \ \forall e \in E(G)$ kapacitásfeltétel

$\tilde{c}(E_{ki}(v)) - \tilde{c}(E_{be}(v)) = 0 \ \forall v \neq s, t$ Kirchhoff-szabály

A cél persze a folyam nagyságának (azaz az s-ből kilépő nettó folyammennyiségnek) a maximalizálása:

$\max \tilde{c}(E_{ki}(s)) - \tilde{c}(E_{be}(s))$

Maximális nagyságú folyamok

A folyamok példájával illusztráljuk, hogyan is készítünk LP/IP feladatot egy gakorlati problémából, és hogyan kaphatunk (szerencsés esetben) igazi matematikai eredményt a dualitási tétel alkamazásával.

A folyamproblémát a (G, s, t, c) négyes határozza meg: G irányított gráf, s, t terminálok (termelő, fogyasztó), c pedig az élek nemnegatív kapacitása. A folyamot (most) x jelöli: ez minden e élhez hozzárendeli a rajta folyó $x(e)$ folyamértéket.

A folyam definíciója szerint x-re az alábbiaknak kell teljesülni:

$x(e) \geq 0 \; \forall e \in E(G)$ nemnegativitás

$x(e) \leq c(e) \; \forall e \in E(G)$ kapacitásfeltétel

$\tilde{c}(E_{ki}(v)) - \tilde{c}(E_{be}(v)) = 0 \; \forall v \neq s, t$ Kirchhoff-szabály

A cél persze a folyam nagyságának (azaz az s-ből kilépő nettó folyammennyiségnek) a maximalizálása:

$\max \tilde{c}(E_{ki}(s)) - \tilde{c}(E_{be}(s))$

Nahát: ez egy LP! Nosza, nézzük meg, mi a duálisa!

Maximális nagyságú folyam duálisa

$$\begin{array}{cccc}
 & & E & \\
 & & x \geq 0 & \\
E & y \geq 0 & \boxed{I} & \leq c \\
V - s, t & \pi & \boxed{B'(G)} & = 0 \\
 & & \geq & \\
 & & 1 \quad -1 \; 0 &
\end{array}$$

Rajzoljunk egy szamárvezetőt!

A mátrix tetején egy egységmátrix írja le a kapacitásfeltételeket. Alatta a $B'(G)$ mátrix felel a Kirchhoff-feltételekért. Ezt úgy kapjuk, hogy a $B(G)$ illeszkedési mátrixból elhagyjuk az s és t terminálokhoz tartozó sorokat.

Maximális nagyságú folyam duálisa

$$\begin{array}{cccc} & & E & \\ & & x \ge 0 & \\ E & y \ge 0 & \boxed{I} & \le c \\ V - s, t & \pi & \boxed{B'(G)} & = 0 \\ & & \ge & \\ & & 1 \quad -1 \; 0 & \end{array}$$

Rajzoljunk egy szamárvezetőt!

A mátrix tetején egy egységmátrix írja le a kapacitásfeltételeket. Alatta a $B'(G)$ mátrix felel a Kirchhoff-feltételekért. Ezt úgy kapjuk, hogy a $B(G)$ illeszkedési mátrixból elhagyjuk az s és t terminálokhoz tartozó sorokat. Az s-ből induló élekhez 1, az s-be érkezőkhőz -1, a többihez 0 célfüggvényérték tartozik.

Maximális nagyságú folyam duálisa

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & E & \\
 & & & x \geq 0 & \\
E & & y \geq 0 & \boxed{I} & \leq c \\
V - s, t & & \pi & \boxed{B'(G)} & = 0 \\
 & & & \geq & \\
 & & & 1 \; -1 \; 0 &
\end{array}
$$

Rajzoljunk egy szamárvezetőt!

A mátrix tetején egy egységmátrix írja le a kapacitásfeltételeket. Alatta a $B'(G)$ mátrix felel a Kirchhoff-feltételekért. Ezt úgy kapjuk, hogy a $B(G)$ illeszkedési mátrixból elhagyjuk az s és t terminálokhoz tartozó sorokat. Az s-ből induló élekhez 1, az s-be érkezőkhőz -1, a többihez 0 célfüggvényérték tartozik.

Ezért a duálisváltozók kétfélék: nemnegatív y-ok tartoznak az élekhez, és előjelkötetlen π (potenciálok) a nemterminális (s, t-től különböző) csúcsokhoz.

Maximális nagyságú folyam duálisa

$\min yc \qquad y \geq 0$
$y(e) - \pi(v) \geq 1 \ \forall e = sv$
$y(e) + \pi(u) \geq -1 \ \forall e = us$
$y(e) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = tv$
$y(e) + \pi(u) \geq 0 \ \forall e = ut$
$y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv$
$\{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset$

$$\begin{array}{cccc} & & E & \\ & & x \geq 0 & \\ E & y \geq 0 & \boxed{I} & \leq c \\ V - s, t & \pi & \boxed{B'(G)} & = 0 \\ & & \geq & \\ & & 1 \ -1 \ 0 & \end{array}$$

Rajzoljunk egy szamárvezetőt!

A mátrix tetején egy egységmátrix írja le a kapacitásfeltételeket. Alatta a $B'(G)$ mátrix felel a Kirchhoff-feltételekért. Ezt úgy kapjuk, hogy a $B(G)$ illeszkedési mátrixból elhagyjuk az s és t terminálokhoz tartozó sorokat. Az s-ből induló élekhez 1, az s-be érkezőkhőz -1, a többihez 0 célfüggvényérték tartozik.
Ezért a duálisváltozók kétfélék: nemnegatív y-ok tartoznak az élekhez, és előjelkötetlen π (potenciálok) a nemterminális (s, t-től különböző) csúcsokhoz. A duális probléma pedig balra fent látható.

Maximális nagyságú folyam duálisa

$$
\begin{array}{l}
\min yc \qquad\qquad y \geq 0 \\
y(e) - \pi(v) \geq 1 \ \forall e = sv \\
y(e) + \pi(u) \geq -1 \ \forall e = us \\
y(e) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = tv \\
y(e) + \pi(u) \geq 0 \ \forall e = ut \\
y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv \\
\{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & & E & \\
 & & x \geq 0 & \\
E & y \geq 0 & \boxed{I} & \leq c \\
V - s, t & \pi & \boxed{B'(G)} & = 0 \\
 & & \geq & \\
 & & 1 \ \ -1 \ 0 &
\end{array}
$$

Rajzoljunk egy szamárvezetőt!

A mátrix tetején egy egységmátrix írja le a kapacitásfeltételeket. Alatta a $B'(G)$ mátrix felel a Kirchhoff-feltételekért. Ezt úgy kapjuk, hogy a $B(G)$ illeszkedési mátrixból elhagyjuk az s és t terminálokhoz tartozó sorokat. Az s-ből induló élekhez 1, az s-be érkezőkhőz -1, a többihez 0 célfüggvényérték tartozik.
Ezért a duálisváltozók kétfélék: nemnegatív y-ok tartoznak az élekhez, és előjelkötetlen π (potenciálok) a nemterminális (s, t-től különböző) csúcsokhoz. A duális probléma pedig balra fent látható. Mivel az s, t terminálokhoz nem tartozik potenciál, ezért a duális feltételek sokfélék.

Maxfolyam duális kalapálás

$$
\begin{aligned}
&\min yc \qquad\qquad y \geq 0 \\
&y(e) - \pi(v) \geq 1 \ \forall e = sv \\
&y(e) + \pi(u) \geq -1 \ \forall e = us \\
&y(e) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = tv \\
&y(e) + \pi(u) \geq 0 \ \forall e = ut \\
&y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \\
&\forall e = uv, \{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & & E & \\
 & & x \geq 0 & \\
E & y \geq 0 & \boxed{I} & \leq c \\
V - s, t & \pi & \boxed{B'(G)} & = 0 \\
 & & \geq & \\
 & & 1 \ \ -1 \ 0 &
\end{array}
$$

Maxfolyam duális kalapálás

$$\begin{aligned}
&\min yc \qquad\qquad y \geq 0\\
&y(e) - \pi(v) \geq 1 \ \forall e = sv\\
&y(e) + \pi(u) \geq -1 \ \forall e = us\\
&y(e) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = tv\\
&y(e) + \pi(u) \geq 0 \ \forall e = ut\\
&y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0\\
&\forall e = uv, \{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E & \\
 & & x \geq 0 & \\
E & y \geq 0 & \boxed{I} & \leq c\\
V - s, t & \pi & \boxed{B'(G)} & = 0\\
 & & \geq & \\
 & & 1 \ -1 \ 0 &
\end{array}$$

Érdemes bevezetni a $\pi(s) = -1$ és $\pi(t) = 0$ potenciálokat, amivel az ötféle feltétel egyfélére egyszerűsödik:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\min yc \qquad\qquad y \geq 0\\
&y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv\\
&\pi(s) = -1, \ \ \pi(t) = 0
\end{aligned}}$$

Maxfolyam duális kalapálás

$\min yc \qquad\qquad y \geq 0$
$y(e) - \pi(v) \geq 1 \ \forall e = sv$
$y(e) + \pi(u) \geq -1 \ \forall e = us$
$y(e) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = tv$
$y(e) + \pi(u) \geq 0 \ \forall e = ut$
$y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0$
$\forall e = uv, \{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset$

$$\begin{array}{ccc}
 & & E \\
 & & x \geq 0 \\
E & y \geq 0 & \boxed{I} & \leq c \\
V - s, t & \pi & \boxed{B'(G)} & = 0 \\
 & & \geq & \\
 & & 1 \ \ -1 \ 0 &
\end{array}$$

Érdemes bevezetni a $\pi(s) = -1$ és $\pi(t) = 0$ potenciálokat, amivel az ötféle feltétel egyfélére egyszerűsödik:

$$\boxed{\begin{array}{l}
\min yc \qquad\qquad y \geq 0 \\
y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv \\
\pi(s) = -1, \ \ \pi(t) = 0
\end{array}}$$

Magyarul: úgy kell az élekre nemnegatív számokat írni, hogy minden élre írt szám legalább annyi legyen, mint az él végpontjai közti potenciálugrás. (A potenciálokat szabadon választhatjuk azzal a megkötéssel, hogy s és t potenciálja -1 ill. 0.)

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min yc & y \geq 0 \\ y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \; \forall e = uv & \\ \pi(s) = -1, & \pi(t) = 0 \end{array}}$$

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min yc & y \geq 0 \\ y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \; \forall e = uv & \\ \pi(s) = -1, & \pi(t) = 0 \end{array}}$$

A DLP mátrixa TU: $B(G)$-ből kapjuk sortörlésekkel és $\pm$egységvektor sorok hozzáadásával.

Ráadásul a jobboldalakon álló konstansok is egészek.

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min yc & y \geq 0 \\ y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv & \\ \pi(s) = -1, & \pi(t) = 0 \end{array}}$$

A DLP mátrixa TU: $B(G)$-ből kapjuk sortörlésekkel és $\pm$egységvektor sorok hozzáadásával.

Ráadásul a jobboldalakon álló konstansok is egészek.

Ezért az optimális megoldások között van olyan, amelyre $y(e)$ és $\pi(v)$ minden e élre és minden v csúcsra egész szám.

E miatt tovább tudjuk egyszerűsíteni az optimális megoldást.

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min yc & y \geq 0 \\ y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv & \\ \pi(s) = -1, & \pi(t) = 0 \end{array}}$$

A DLP mátrixa TU: $B(G)$-ből kapjuk sortörlésekkel és $\pm$egységvektor sorok hozzáadásával.

Ráadásul a jobboldalakon álló konstansok is egészek.
Ezért az optimális megoldások között van olyan, amelyre $y(e)$ és $\pi(v)$ minden e élre és minden v csúcsra egész szám.
E miatt tovább tudjuk egyszerűsíteni az optimális megoldást.
Cseréljünk ki minden negatív π értéket -1-re, és minden pozitívat 0-ra. Könnyen látható, hogy továbbra is megoldást kapunk, és a célfüggvény értéke sem változik. Ezek után cseréljünk le minden 1-nél nagyobb y értéket 1-re. Továbbra is megoldást kapunk, és mivel a célfüggvényérték sem növekszik, optimálisat.

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min yc & y \geq 0 \\ y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv & \\ \pi(s) = -1, & \pi(t) = 0 \end{array}}$$

A DLP mátrixa TU: $B(G)$-ből kapjuk sortörlésekkel és $\pm$egységvektor sorok hozzáadásával.

Ráadásul a jobboldalakon álló konstansok is egészek.

Ezért az optimális megoldások között van olyan, amelyre $y(e)$ és $\pi(v)$ minden e élre és minden v csúcsra egész szám.

E miatt tovább tudjuk egyszerűsíteni az optimális megoldást. Cseréljünk ki minden negatív π értéket -1-re, és minden pozitívat 0-ra. Könnyen látható, hogy továbbra is megoldást kapunk, és a célfüggvény értéke sem változik. Ezek után cseréljünk le minden 1-nél nagyobb y értéket 1-re. Továbbra is megoldást kapunk, és mivel a célfüggvényérték sem növekszik, optimálisat.

Jelölje $X := \pi^{-1}(-1)$ a -1 potenciálú csúcsok halmazát. Csak az X-ből kilépő élek mentén nő a potenciál: y csak ezeken vesz fel 1 értéket. Mivel $s \in X \not\ni t$, X egy st-vágást határoz meg, így a célfüggvényérték pontosan az X-ből kilépő élek összkapacitása.

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min yc & y \geq 0 \\ y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0 \ \forall e = uv & \\ \pi(s) = -1, & \pi(t) = 0 \end{array}}$$

A DLP mátrixa TU: $B(G)$-ből kapjuk sortörlésekkel és $\pm$egységvektor sorok hozzáadásával.

Ráadásul a jobboldalakon álló konstansok is egészek.
Ezért az optimális megoldások között van olyan, amelyre $y(e)$ és $\pi(v)$ minden e élre és minden v csúcsra egész szám.
E miatt tovább tudjuk egyszerűsíteni az optimális megoldást. Cseréljünk ki minden negatív π értéket -1-re, és minden pozitívat 0-ra. Könnyen látható, hogy továbbra is megoldást kapunk, és a célfüggvény értéke sem változik. Ezek után cseréljünk le minden 1-nél nagyobb y értéket 1-re. Továbbra is megoldást kapunk, és mivel a célfüggvényérték sem növekszik, optimálisat.
Jelölje $X := \pi^{-1}(-1)$ a -1 potenciálú csúcsok halmazát. Csak az X-ből kilépő élek mentén nő a potenciál: y csak ezeken vesz fel 1 értéket. Mivel $s \in X \not\ni t$, X egy st-vágást határoz meg, így a célfüggvényérték pontosan az X-ből kilépő élek összkapacitása.
A dualitástételből pedig közvetlenül adódik a Ford-Fulkerson-tétel.

Maxfolyam, TU mátrix, Ford-Fulkerson

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min yc & y \geq 0 \\ y(e)+\pi(u)-\pi(v) \geq 0\ \forall e=uv & \\ \pi(s)=-1, & \pi(t)=0 \end{array}}$$

A DLP mátrixa TU: $B(G)$-ből kapjuk sortörlésekkel és $\pm$egységvektor sorok hozzáadásával.

Ráadásul a jobboldalakon álló konstansok is egészek.
Ezért az optimális megoldások között van olyan, amelyre $y(e)$ és $\pi(v)$ minden e élre és minden v csúcsra egész szám.
E miatt tovább tudjuk egyszerűsíteni az optimális megoldást.
Cseréljünk ki minden negatív π értéket -1-re, és minden pozitívat 0-ra. Könnyen látható, hogy továbbra is megoldást kapunk, és a célfüggvény értéke sem változik. Ezek után cseréljünk le minden 1-nél nagyobb y értéket 1-re. Továbbra is megoldást kapunk, és mivel a célfüggvényérték sem növekszik, optimálisat.
Jelölje $X := \pi^{-1}(-1)$ a -1 potenciálú csúcsok halmazát. Csak az X-ből kilépő élek mentén nő a potenciál: y csak ezeken vesz fel 1 értéket. Mivel $s \in X \not\ni t$, X egy st-vágást határoz meg, így a célfüggvényérték pontosan az X-ből kilépő élek összkapacitása.
A dualitástételből pedig közvetlenül adódik a Ford-Fulkerson-tétel.

Győztünk!

Vége!