Kombinatorikus optimalizálás

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek, Farkas-lemma

2023. március 21.

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása

$$\begin{aligned} -x + y + 3z + 4t &= -1 \\ 2x - 3y + 7z - 7t &= 1 \\ x + 2z - t &= 6 \end{aligned}$$

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

$$\begin{aligned} -x+y+3z+4t &= -1 \\ 2x-3y+7z-7t &= 1 \\ x+2z-t &= 6 \end{aligned}$$

x	y	z	t	
−1	1	−3	4	−1
2	−3	7	−7	1
1	0	2	−1	6

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

x	y	z	t	
-1	1	-3	4	-1
2	-3	7	-7	1
1	0	2	-1	6

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

x	y	z	t	
-1	1	-3	4	-1
2	-3	7	-7	1
1	0	2	-1	6

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.

x	y	z	t	
-1	1	-3	4	-1
2	-3	7	-7	1
1	0	2	-1	6
$\boxed{1}$	-1	3	-4	1
2	-3	7	-7	1
1	0	2	-1	6

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.

x	y	z	t	
$\boxed{1}$	-1	3	-4	1
2	-3	7	-7	1
1	0	2	-1	6

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.

x	y	z	t	
$\boxed{1}$	-1	3	-4	1
2	-3	7	-7	1
1	0	2	-1	6
$\boxed{1}$	-1	3	-4	1
0	-1	1	1	-1
0	1	-1	3	5

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.
- Sorokat felcserélünk.
- (csupa0 sort elhagyunk.)

x	y	z	t	
$\boxed{1}$	-1	3	-4	1
0	-1	1	1	-1
0	1	-1	3	5
$\boxed{1}$	-1	3	-4	1
0	$\boxed{1}$	-1	3	5
0	-1	1	1	-1

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.
- Sorokat felcserélünk.

x	y	z	t	
$\boxed{1}$	-1	3	-4	1
0	$\boxed{1}$	-1	3	5
0	-1	1	1	-1

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.
- Sorokat felcserélünk.

x	y	z	t	
$\boxed{1}$	-1	3	-4	1
0	$\boxed{1}$	-1	3	5
0	-1	1	1	-1
$\boxed{1}$	-1	3	-4	1
0	$\boxed{1}$	-1	3	5
0	0	0	4	4

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.
- Sorokat felcserélünk.

x	y	z	t	
$\boxed{1}$	-1	3	-4	1
0	$\boxed{1}$	-1	3	5
0	0	0	4	4

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.
- Sorokat felcserélünk.

Előbb-utóbb lépcsős alakot (LA) kapunk.
LA:

1. Minen sor első nemnulla eleme egy (vezér)egyes.
2. minden vezéregyes feletti sorban van a vezéregyestől balra vezéregyes.

x	y	z	t	
$\boxed{1}$	-1	3	-4	1
0	$\boxed{1}$	-1	3	5
0	0	0	4	4
$\boxed{1}$	-1	3	-4	1
0	$\boxed{1}$	-1	3	5
0	0	0	$\boxed{1}$	1

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.
- Sorokat felcserélünk.

Előbb-utóbb lépcsős alakot (LA) kapunk.
LA:

1. Minen sor első nemnulla eleme egy (vezér)egyes.
2. minden vezéregyes feletti sorban van a vezéregyestől balra vezéregyes.

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ \hline \end{array}$$

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.
- Sorokat felcserélünk.

Előbb-utóbb lépcsős alakot (LA) kapunk.
LA:

1. Minen sor első nemnulla eleme egy (vezér)egyes.
2. minden vezéregyes feletti sorban van a vezéregyestől balra vezéregyes.

x	y	z	t	
$\boxed{1}$	-1	3	-4	1
0	$\boxed{1}$	-1	3	5
0	0	0	$\boxed{1}$	1
$\boxed{1}$	-1	3	0	5
0	$\boxed{1}$	-1	0	2
0	0	0	$\boxed{1}$	1

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.
- Sorokat felcserélünk.

Előbb-utóbb lépcsős alakot (LA) kapunk.

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ \hline \end{array}$$

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.
- Sorokat felcserélünk.

Előbb-utóbb lépcsős alakot (LA), majd redukált lécsős alakot (RLA) kapunk.
RLA: LA + vezéregyes felett csak 0 áll.

$$
\begin{array}{cccc|c}
x & y & z & t & \\
\hline
\boxed{1} & -1 & 3 & 0 & 5 \\
0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\
\hline
\boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 7 \\
0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.
- Sorokat felcserélünk.

Előbb-utóbb lépcsős alakot (LA), majd redukált lécsős alakot (RLA) kapunk.

x	y	z	t	
$\boxed{1}$	0	2	0	7
0	$\boxed{1}$	-1	0	2
0	0	0	$\boxed{1}$	1

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.
- Sorokat felcserélünk.

x	y	z	t	
$\boxed{1}$	0	2	0	7
0	$\boxed{1}$	-1	0	2
0	0	0	$\boxed{1}$	1

Előbb-utóbb lépcsős alakot (LA), majd redukált lécsős alakot (RLA) kapunk.

$$\boxed{\begin{array}{l} z \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}, \\ x = 7 - 2z \\ y = 2 + z \\ t = 1 \end{array}}$$

A RLA-ból minden megoldás kiolvasható: a szabad paraméter(ek) értéke tetszőleges, a vezéregyeseknek megfelelő ismeretlenekhez pedig egy-egy értékadó egyenlőség tartozik.

Szabad paraméter: ismeretlen, amihez nem tartozik vezéregyes.

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ \hline \end{array}$$

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.
- Sorokat felcserélünk.

$$\boxed{\begin{array}{l} z \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}, \\ x = 7 - 2z \\ y = 2 + z \\ t = 1 \end{array}}$$

Előbb-utóbb lépcsős alakot (LA), majd redukált lécsős alakot (RLA) kapunk.

A RLA-ból minden megoldás kiolvasható: a szabad paraméter(ek) értéke tetszőleges, a vezéregyeseknek megfelelő ismeretlenekhez pedig egy-egy értékadó egyenlőség tartozik.

Lineáris egyenletrendszerek (ismétlés)

Lin. egyenletrendszer megoldása : kibővített együtthatómátrixszal.

Gauss-elimináció: elemi sorekvivalens átalakításokkal elimináljuk az egyes ismeretleneket.

- Sort nemnullával végigszorzunk.
- Sor λ-szorosát másik sorhoz adjuk.
- Sorokat felcserélünk.

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ \hline \end{array}$$

Előbb-utóbb lépcsős alakot (LA), majd redukált lécsős alakot (RLA) kapunk.

$$\boxed{\begin{array}{l} z \in \mathbb{R} \text{ tetsz.,} \\ x = 7 - 2z \\ y = 2 + z \\ t = 1 \end{array}}$$

A RLA-ból minden megoldás kiolvasható: a szabad paraméter(ek) értéke tetszőleges, a vezéregyeseknek megfelelő ismeretlenekhez pedig egy-egy értékadó egyenlőség tartozik.

Továbbá: (nincs megoldás) $\iff$ (RLA tilos sort tartalmaz).

Tilos sor: egy $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & p \end{array} \right)$ sor, ahol $p \neq 0$. (Tkp $p = \boxed{1}$.)

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek

- Olyan, mint a lin. egyenletrendszer (BO: ismeretlenek, JO: konstansok), de lehetnek egyenlőtlenségek is.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek

- Olyan, mint a lin. egyenletrendszer (BO: ismeretlenek, JO: konstansok), de lehetnek egyenlőtlenségek is.
- Az egyenlőségek helyettesíthetők két egyenlőtlenséggel.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek

- Olyan, mint a lin. egyenletrendszer (BO: ismeretlenek, JO: konstansok), de lehetnek egyenlőtlenségek is.
- Az egyenlőségek helyettesíthetők két egyenlőtlenséggel.
- Feltehető, hogy minden egyenlőtlenség $\leq$ típusú.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek

- Olyan, mint a lin. egyenletrendszer (BO: ismeretlenek, JO: konstansok), de lehetnek egyenlőtlenségek is.
- Az egyenlőségek helyettesíthetők két egyenlőtlenséggel.
- Feltehető, hogy minden egyenlőtlenség $\leq$ típusú.
- Itt is a kibővített együtthatómátrixszal érdemes dolgozni.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek

- Olyan, mint a lin. egyenletrendszer (BO: ismeretlenek, JO: konstansok), de lehetnek egyenlőtlenségek is.
- Az egyenlőségek helyettesíthetők két egyenlőtlenséggel.
- Feltehető, hogy minden egyenlőtlenség $\leq$ típusú.
- Itt is a kibővített együtthatómátrixszal érdemes dolgozni.

Példa:

$$\begin{aligned} -x + y - 3z + 4t &= -1 \\ 2x - 3y + 7z - 7t &\leq 1 \\ x + 2z - t &\geq 6 \end{aligned}$$

x	y	z	t	$\leq$
-1	1	-3	4	-1
1	-1	3	-4	1
2	-3	7	-7	1
-1	0	-2	1	-6

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek

- Olyan, mint a lin. egyenletrendszer (BO: ismeretlenek, JO: konstansok), de lehetnek egyenlőtlenségek is.
- Az egyenlőségek helyettesíthetők két egyenlőtlenséggel.
- Feltehető, hogy minden egyenlőtlenség $\leq$ típusú.
- Itt is a kibővített együtthatómátrixszal érdemes dolgozni.

Példa:

$$\begin{array}{rcr} -x+y-3z+4t & = & -1 \\ 2x-3y+7z-7t & \leq & 1 \\ x+2z-t & \geq & 6 \end{array}$$

x	y	z	t	$\leq$
-1	1	-3	4	-1
1	-1	3	-4	1
2	-3	7	-7	1
-1	0	-2	1	-6

A Gauss-elimináció sajnos itt már nem működik.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek

- Olyan, mint a lin. egyenletrendszer (BO: ismeretlenek, JO: konstansok), de lehetnek egyenlőtlenségek is.
- Az egyenlőségek helyettesíthetők két egyenlőtlenséggel.
- Feltehető, hogy minden egyenlőtlenség $\leq$ típusú.
- Itt is a kibővített együtthatómátrixszal érdemes dolgozni.

Példa:

$$\begin{array}{rcr} -x+y-3z+4t & = & -1 \\ 2x-3y+7z-7t & \leq & 1 \\ x+2z-t & \geq & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} x & y & z & t & \leq \\ \hline -1 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & -7 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & -6 \\ \hline \end{array}$$

A Gauss-elimináció sajnos itt már nem működik.
(Sort negatív számmal szorozva az egyenlőtlenség megfordulna.)

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek

- Olyan, mint a lin. egyenletrendszer (BO: ismeretlenek, JO: konstansok), de lehetnek egyenlőtlenségek is.
- Az egyenlőségek helyettesíthetők két egyenlőtlenséggel.
- Feltehető, hogy minden egyenlőtlenség $\leq$ típusú.
- Itt is a kibővített együtthatómátrixszal érdemes dolgozni.

Példa:

$$\begin{aligned} -x+y-3z+4t &= -1 \\ 2x-3y+7z-7t &\leq 1 \\ x+2z-t &\geq 6 \end{aligned}$$

x	y	z	t	$\leq$
-1	1	-3	4	-1
1	-1	3	-4	1
2	-3	7	-7	1
-1	0	-2	1	-6

A Gauss-elimináció sajnos itt már nem működik.
(Sort negatív számmal szorozva az egyenlőtlenség megfordulna.)
Ezért olyan módszer a cél, ami elkerüli a negatív számmal szorzást.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek

- Olyan, mint a lin. egyenletrendszer (BO: ismeretlenek, JO: konstansok), de lehetnek egyenlőtlenségek is.
- Az egyenlőségek helyettesíthetők két egyenlőtlenséggel.
- Feltehető, hogy minden egyenlőtlenség $\leq$ típusú.
- Itt is a kibővített együtthatómátrixszal érdemes dolgozni.

Példa:

$$\begin{aligned} -x + y - 3z + 4t &= -1 \\ 2x - 3y + 7z - 7t &\leq 1 \\ x + 2z - t &\geq 6 \end{aligned}$$

x	y	z	t	$\leq$
-1	1	-3	4	-1
1	-1	3	-4	1
2	-3	7	-7	1
-1	0	-2	1	-6

A Gauss-elimináció sajnos itt már nem működik.
(Sort negatív számmal szorozva az egyenlőtlenség megfordulna.)
Ezért olyan módszer a cél, ami elkerüli a negatív számmal szorzást.
Sajnos azonban ez bonyolultabb és fáradságosabb lesz, mint a GE.

Fourier-Motzkin-elimináció áttekintés

- A FME minden fázisában egy-egy ismeretlent eliminálunk. Az elimnációs lépés után kapott lin. egyenlőtlenségrendszer

Fourier-Motzkin-elimináció áttekintés

- A FME minden fázisában egy-egy ismeretlent eliminálunk. Az elimnációs lépés után kapott lin. egyenlőtlenségrendszer
  - nem tartalmazza az eliminált ismeretlent,

Fourier-Motzkin-elimináció áttekintés

- A FME minden fázisában egy-egy ismeretlent eliminálunk. Az elimnációs lépés után kapott lin. egyenlőtlenségrendszer
  - nem tartalmazza az eliminált ismeretlent,
  - pontosan akkor oldható meg, ha az eredeti megoldható,

Fourier-Motzkin-elimináció áttekintés

- A FME minden fázisában egy-egy ismeretlent eliminálunk. Az elimnációs lépés után kapott lin. egyenlőtlenségrendszer
  - nem tartalmazza az eliminált ismeretlent,
  - pontosan akkor oldható meg, ha az eredeti megoldható,
- Az eliminált rendszer bmely megoldásából megkapható a korábbi rendszer egy megoldása.

Fourier-Motzkin-elimináció áttekintés

- A FME minden fázisában egy-egy ismeretlent eliminálunk. Az elimnációs lépés után kapott lin. egyenlőtlenségrendszer
  - nem tartalmazza az eliminált ismeretlent,
  - pontosan akkor oldható meg, ha az eredeti megoldható,
- Az eliminált rendszer bmely megoldásából megkapható a korábbi rendszer egy megoldása.
- A korábbi rendszer megoldásai az elimináltat is megoldják.

Fourier-Motzkin-elimináció áttekintés

- A FME minden fázisában egy-egy ismeretlent eliminálunk. Az elimnációs lépés után kapott lin. egyenlőtlenségrendszer
  - nem tartalmazza az eliminált ismeretlent,
  - pontosan akkor oldható meg, ha az eredeti megoldható,
- Az eliminált rendszer bmely megoldásából megkapható a korábbi rendszer egy megoldása.
- A korábbi rendszer megoldásai az elimináltat is megoldják.
- Az összes változó eliminálása után azonnal látszik, van-e megoldás. (Nincs megoldás $\iff$ tilos sort kapunk.)

Fourier-Motzkin-elimináció áttekintés

- A FME minden fázisában egy-egy ismeretlent eliminálunk. Az elimnációs lépés után kapott lin. egyenlőtlenségrendszer
  - nem tartalmazza az eliminált ismeretlent,
  - pontosan akkor oldható meg, ha az eredeti megoldható,
- Az eliminált rendszer bmely megoldásából megkapható a korábbi rendszer egy megoldása.
- A korábbi rendszer megoldásai az elimináltat is megoldják.
- Az összes változó eliminálása után azonnal látszik, van-e megoldás. (Nincs megoldás $\iff$ tilos sort kapunk.)
- A megoldásra ugyan nincs az RLA esetén kapotthoz hasonló explicit képlet, de az eredeti rendszer bármely megoldása megkapható úgy, hogy a változóknak az eliminálás fordított sorrendjében adunk értéket.

Az x ismeretlen eliminációja

- A cél olyan egyenlőtlenségrsz-t találni, amiben x nem szerepel, de a többi ismeretlen szempontjából ugyanazok a megoldások.

Az x ismeretlen eliminációja

- A cél olyan egyenlőtlenségrsz-t találni, amiben x nem szerepel, de a többi ismeretlen szempontjából ugyanazok a megoldások.
- Feltehető: x együtthatója $\forall$ egyenlőtlenségben 0 vagy ± 1.

Az x ismeretlen eliminációja

- A cél olyan egyenlőtlenségrsz-t találni, amiben x nem szerepel, de a többi ismeretlen szempontjából ugyanazok a megoldások.
- Feltehető: x együtthatója $\forall$ egyenlőtlenségben 0 vagy ± 1.
- A 0 együtthatós egyenlőtlenségeket megtartjuk.

Az x ismeretlen eliminációja

- A cél olyan egyenlőtlenségrsz-t találni, amiben x nem szerepel, de a többi ismeretlen szempontjából ugyanazok a megoldások.
- Feltehető: x együtthatója $\forall$ egyenlőtlenségben 0 vagy ± 1.
- A 0 együtthatós egyenlőtlenségeket megtartjuk.
- $x \leq a_i$ ill. $-x \leq b_j$ (azaz $x \geq -b_j$) típusú egyenlőtlenségekből kell x-et eliminálni. (a_i, b_j a többi ismeretlentől is függ.)

Az x ismeretlen eliminációja

- A cél olyan egyenlőtlenségrsz-t találni, amiben x nem szerepel, de a többi ismeretlen szempontjából ugyanazok a megoldások.
- Feltehető: x együtthatója $\forall$ egyenlőtlenségben 0 vagy ± 1.
- A 0 együtthatós egyenlőtlenségeket megtartjuk.
- $x \leq a_i$ ill. $-x \leq b_j$ (azaz $x \geq -b_j$) típusú egyenlőtlenségekből kell x-et eliminálni. (a_i, b_j a többi ismeretlentől is függ.)
- Az eliminálás előtti rendszer pontosan akkor megoldható, ha a 0 együtthatós egyenlőtlenségek mellett megkívánt $-b_j \leq x \leq a_i$ egyenlőtlenségeknek van közös megoldása.

Az x ismeretlen eliminációja

- A cél olyan egyenlőtlenségrsz-t találni, amiben x nem szerepel, de a többi ismeretlen szempontjából ugyanazok a megoldások.
- Feltehető: x együtthatója $\forall$ egyenlőtlenségben 0 vagy ± 1.
- A 0 együtthatós egyenlőtlenségeket megtartjuk.
- $x \leq a_i$ ill. $-x \leq b_j$ (azaz $x \geq -b_j$) típusú egyenlőtlenségekből kell x-et eliminálni. (a_i, b_j a többi ismeretlentől is függ.)
- Az eliminálás előtti rendszer pontosan akkor megoldható, ha a 0 együtthatós egyenlőtlenségek mellett megkívánt $-b_j \leq x \leq a_i$ egyenlőtlenségeknek van közös megoldása.
- Így elimináljuk x-et: A 0 együtthatós egyenlőtlenségek mellé bevesszük az összes $0 \leq a_i + b_j$ egyenlőtlenséget.

Az x ismeretlen eliminációja

- A cél olyan egyenlőtlenségrsz-t találni, amiben x nem szerepel, de a többi ismeretlen szempontjából ugyanazok a megoldások.
- Feltehető: x együtthatója $\forall$ egyenlőtlenségben 0 vagy ± 1.
- A 0 együtthatós egyenlőtlenségeket megtartjuk.
- $x \leq a_i$ ill. $-x \leq b_j$ (azaz $x \geq -b_j$) típusú egyenlőtlenségekből kell x-et eliminálni. (a_i, b_j a többi ismeretlentől is függ.)
- Az eliminálás előtti rendszer pontosan akkor megoldható, ha a 0 együtthatós egyenlőtlenségek mellett megkívánt $-b_j \leq x \leq a_i$ egyenlőtlenségeknek van közös megoldása.
- Így elimináljuk x-et: A 0 együtthatós egyenlőtlenségek mellé bevesszük az összes $0 \leq a_i + b_j$ egyenlőtlenséget.
- Az eliminált rendszer megoldásai megegyeznek az elimináció előtti rendszer megoldásaival, ha azokból x-et elhagyjuk.

Az x ismeretlen eliminációja

- A cél olyan egyenlőtlenségrsz-t találni, amiben x nem szerepel, de a többi ismeretlen szempontjából ugyanazok a megoldások.
- Feltehető: x együtthatója $\forall$ egyenlőtlenségben 0 vagy ± 1.
- A 0 együtthatós egyenlőtlenségeket megtartjuk.
- $x \leq a_i$ ill. $-x \leq b_j$ (azaz $x \geq -b_j$) típusú egyenlőtlenségekből kell x-et eliminálni. (a_i, b_j a többi ismeretlentől is függ.)
- Az eliminálás előtti rendszer pontosan akkor megoldható, ha a 0 együtthatós egyenlőtlenségek mellett megkívánt $-b_j \leq x \leq a_i$ egyenlőtlenségeknek van közös megoldása.
- Így elimináljuk x-et: A 0 együtthatós egyenlőtlenségek mellé bevesszük az összes $0 \leq a_i + b_j$ egyenlőtlenséget.
- Az eliminált rendszer megoldásai megegyeznek az elimináció előtti rendszer megoldásaival, ha azokból x-et elhagyjuk.
- Az eliminációban használt lépések:
  (1) sor **pozitív** számmal szorzása,
  (2) sorcsere,
  (3) *két sor összegének új sorként történő bevétele*,
  (4) **bizonyos, nem csupa**0 **sorok elhagyása**.

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{r|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Konkrét példa:

x	y	z	$\leq$
1	2	1	6
0	-1	-3	-7
-1	-3	0	0
1	4	2	3

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Konkrét példa:

x	y	z	$\leq$
1	2	1	6
0	-1	-3	-7
-1	-3	0	0
1	4	2	3
1	2	1	6
1	4	2	3
-1	-3	0	0
0	-1	-3	-7

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{r|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Konkrét példa:

x	y	z	$\leq$
1	2	1	6
1	4	2	3
-1	-3	0	0
0	-1	-3	-7

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Konkrét példa:

x	y	z	$\leq$
1	2	1	6
1	4	2	3
-1	-3	0	0
0	-1	-3	-7
0	-1	1	6
0	1	2	3
0	-1	-3	-7

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{r|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Konkrét példa:

x	y	z	$\leq$
0	-1	1	6
0	1	2	3
0	-1	-3	-7

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Konkrét példa:

x	y	z	$\leq$
0	-1	1	6
0	1	2	3
0	-1	-3	-7
0	1	2	3
0	-1	1	6
0	-1	-3	-7

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Konkrét példa:

x	y	z	$\leq$
0	1	2	3
0	-1	1	6
0	-1	-3	-7

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{r|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Konkrét példa:

x	y	z	$\leq$
0	1	2	3
0	-1	1	6
0	-1	-3	-7
0	0	3	9
0	0	-1	-4

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right)$, ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Konkrét példa:

x	y	z	$\leq$
0	0	3	9
0	0	-1	-4

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{r|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Konkrét példa:

x	y	z	$\leq$
0	0	3	9
0	0	-1	-4
0	0	1	3
0	0	-1	-4

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Konkrét példa:

x	y	z	$\leq$
0	0	1	3
0	0	-1	-4

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Konkrét példa:

x	y	z	$\leq$
0	0	1	3
0	0	-1	-4
0	0	0	-1

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Konkrét példa:

x	y	z	$\leq$
0	0	1	3
0	0	-1	-4
0	0	0	-1

Tilos sor: egy $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & p \end{array}\right)$ sor, ahol $p < 0$.

(Ez egy $0 \leq p < 0$ egyenlőtlenségnek felel meg: nincs megoldás.)

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right)$, ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
1	2	1	6
0	-1	-3	-4
-1	-3	0	0
1	4	2	3

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{r|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
1	2	1	6
0	-1	-3	-4
-1	-3	0	0
1	4	2	3
1	2	1	6
1	4	2	3
-1	-3	0	0
0	-1	-3	-4

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right)$, ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
1	2	1	6
1	4	2	3
-1	-3	0	0
0	-1	-3	-4

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{r|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
1	2	1	6
1	4	2	3
-1	-3	0	0
0	-1	-3	-4
0	-1	1	6
0	1	2	3
0	-1	-3	-4

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
0	-1	1	6
0	1	2	3
0	-1	-3	-4

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
0	-1	1	6
0	1	2	3
0	-1	-3	-4
0	1	2	3
0	-1	1	6
0	-1	-3	-4

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{r|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
0	1	2	3
0	-1	1	6
0	-1	-3	-4

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right)$, ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
0	1	2	3
0	-1	1	6
0	-1	-3	-4
0	0	3	9
0	0	-1	-1

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{r|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right)$, ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
0	0	3	9
0	0	-1	-1

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
0	0	3	9
0	0	-1	-1
0	0	1	3
0	0	-1	-1

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{r|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
0	0	1	3
0	0	-1	-1
0	0	0	2

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{r|l} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
0	0	1	3
0	0	-1	-1
0	0	0	2

Nincs tilos sor, ezért van megoldás.
A z eliminációja előtt $1 \leq z \leq 3$ volt a feltétel, így pl $\boxed{z=1}$-hez van megoldás.

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{r|l} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
0	1	2	3
0	-1	1	6
0	-1	-3	-4

Nincs tilos sor, ezért van megoldás.
A z eliminációja előtt $1 \leq z \leq 3$ volt a feltétel, így pl $\boxed{z=1}$-hez van megoldás.
Ezt behelyettesítve az y eliminációja előtti állapotba $1 \leq y \leq 1$ adódik: $\boxed{y=1}$.

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
1	2	1	6
1	4	2	3
-1	-3	0	0
0	-1	-3	-4

Nincs tilos sor, ezért van megoldás. A z eliminációja előtt $1 \leq z \leq 3$ volt a feltétel, így pl $\boxed{z=1}$-hez van megoldás. Ezt behelyettesítve az y eliminációja előtti állapotba $1 \leq y \leq 1$ adódik: $\boxed{y=1}$.

Ezeket behelyettesítve az x eliminációja előtti állapotba $-3 \leq x \leq -3$ adódik, így az $\boxed{x=-3,\ y=z=1}$ megoldást kaptuk,

Fourier-Motzkin elimináció az együtthatómátrixon

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & A_1 \\ \hline -1 & A_{-1} \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_x \\ \hline 0 & A_o \end{array}\right),$$ ahol A_1 ill. A_{-1} az 1 ill. -1 együtthatók utáni sorok, A_x sorait pedig úgy kapjuk, hogy A_1 és A_{-1} sorait az összes lehetséges módon összeadjuk.

(Ha A_1 vagy A_{-1} üres, akkor A_x is 0 sorból áll.)

Nézzünk most egy másik konkrét példát:

x	y	z	$\leq$
1	2	1	6
1	4	2	3
-1	-3	0	0
0	-1	-3	-4

Nincs tilos sor, ezért van megoldás. A z eliminációja előtt $1 \leq z \leq 3$ volt a feltétel, így pl $\boxed{\text{z=1}}$-hez van megoldás. Ezt behelyettesítve az y eliminációja előtti állapotba $1 \leq y \leq 1$ adódik: $\boxed{\text{y=1}}$.

Ezeket behelyettesítve az x eliminációja előtti állapotba $-3 \leq x \leq -3$ adódik, így az $\boxed{\text{x=-3, y=z=1}}$ megoldást kaptuk, de bármely más megoldást is megkaphattunk volna ugyanezzel a módszerrel. (És amit a módszerrel kapunk, az biztosan megoldás.)

A lineáris egyenlőtlenségrendszer mátrixszorzatos alakja

Írjuk fel egy lineáris egyenlőtlenségrendszer kibővített együtthatómátrixát!

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_3 &\leq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 1 \\ x_1 + 2x_3 &\leq 6 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) = (A|b)$$

A lineáris egyenlőtlenségrendszer mátrixszorzatos alakja

Írjuk fel egy lineáris egyenlőtlenségrendszer kibővített együtthatómátrixát!

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_3 &\leq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 1 \\ x_1 + 2x_3 &\leq 6 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) = (A|b)$$

Az $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ oszlopvektor segítségével az eredeti egyenlőtlenségrendszer röviden $Ax \leq b$ alakban írható fel:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenlőtlenségrendszer mátrixszorzatos alakja

Írjuk fel egy lineáris egyenlőtlenségrendszer kibővített együtthatómátrixát!

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 - 3x_3 & \leq & 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 & \leq & 1 \\ x_1 + 2x_3 & \leq & 6 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) = (A|b)$$

Az $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ oszlopvektor segítségével az eredeti egyenlőtlenségrendszer röviden $Ax \leq b$ alakban írható fel:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Azt vizsgáljuk a továbbiakban, hogy a Fourier-Motzkin elimináció során a kibővített együtthatómátrixon végzett sorműveletek minek felelnek meg mátrixterminológiában.

A mátrixszorzás egy érdekes tulajdonsága

Nézzünk meg közelebbről egy mátrixszorzást:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9 & 8 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 10 \end{pmatrix}
\end{array}$$

A mátrixszorzás egy érdekes tulajdonsága

Nézzünk meg közelebbről egy mátrixszorzást:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9 & 8 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Megf: (1) Az AB mátrix i-dik sora a B mátrix sorainak lineáris kombinációja (alkalmas együtthatókkal vett szorzatainak összege). A szóban forgó együtthatók az A mátrix i-dik sorában találhatók.

A mátrixszorzás egy érdekes tulajdonsága

Nézzünk meg közelebbről egy mátrixszorzást:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9 & 8 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Megf: (1) Az AB mátrix i-dik sora a B mátrix sorainak lineáris kombinációja (alkalmas együtthatókkal vett szorzatainak összege). A szóban forgó együtthatók az A mátrix i-dik sorában találhatók.
(2) Hasonlóan, az AB j-dik oszlopa az A oszlopainak az a lineáris kombinációja, aminek együtthatói a B j-dik oszlopában vannak.

A mátrixszorzás egy érdekes tulajdonsága

Nézzünk meg közelebbről egy mátrixszorzást:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9 & 8 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 10 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Megf: (1) Az AB mátrix i-dik sora a B mátrix sorainak lineáris kombinációja (alkalmas együtthatókkal vett szorzatainak összege). A szóban forgó együtthatók az A mátrix i-dik sorában találhatók.
(2) Hasonlóan, az AB j-dik oszlopa az A oszlopainak az a lineáris kombinációja, aminek együtthatói a B j-dik oszlopában vannak.
Köv: A v sorvektor tehát pontosan akkor lineáris kombinációja az A mátrix sorainak, ha $v = yA$ alkalmas y sorvektorra.

A Farkas-lemma

A Fourier-Motzkin elimináció során kapott bármely mátrix sorait az eredeti (kibővített) együtthatómátrix bizonyos sorainak lineáris kombinációjaként (azaz nemnegatív együtthatókkal vett összegeként) kapjuk. Az alábbi tétel azt a tényt fogalmazza meg, hogy ha a Fourier-Motzkin elimináció nem tilos sorral ér véget, akkor az eredeti lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható.

A Farkas-lemma

A Fourier-Motzkin elimináció során kapott bármely mátrix sorait az eredeti (kibővített) együtthatómátrix bizonyos sorainak lineáris kombinációjaként (azaz nemnegatív együtthatókkal vett összegeként) kapjuk. Az alábbi tétel azt a tényt fogalmazza meg, hogy ha a Fourier-Motzkin elimináció nem tilos sorral ér véget, akkor az eredeti lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható.

Farkas-lemma: Az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer pontosan akkor megoldható, ha nem kaphatunk tilos sort, azaz ha nincs olyan nemnegatív y sorvektor, amire $yA = 0$ és $yb < 0$.

(Itt az első 0 sorvektor, a második skalár.)

Formulával: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$ $\square$

A Farkas-lemma

A Fourier-Motzkin elimináció során kapott bármely mátrix sorait az eredeti (kibővített) együtthatómátrix bizonyos sorainak lineáris kombinációjaként (azaz nemnegatív együtthatókkal vett összegeként) kapjuk. Az alábbi tétel azt a tényt fogalmazza meg, hogy ha a Fourier-Motzkin elimináció nem tilos sorral ér véget, akkor az eredeti lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható.

Farkas-lemma: Az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer pontosan akkor megoldható, ha nem kaphatunk tilos sort, azaz ha nincs olyan nemnegatív y sorvektor, amire $yA = 0$ és $yb < 0$.

(Itt az első 0 sorvektor, a második skalár.)

Formulával: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$ □

Megj: A Farkas-lemma nem ad módszert a megoldás (vagy a tilos sor) keresésére. Erre a Fourier-Motzkin-elimináció alkalmas, ahogy ezt korábban láttuk: ha a FM-elimináció után nincs tilos sor, akkor az eliminálás fordított sorrendjében választott értékadásokkal mindig megoldást kapunk, és minden megoldás megkapható így.

A Farkas-lemma

A Fourier-Motzkin elimináció során kapott bármely mátrix sorait az eredeti (kibővített) együtthatómátrix bizonyos sorainak lineáris kombinációjaként (azaz nemnegatív együtthatókkal vett összegeként) kapjuk. Az alábbi tétel azt a tényt fogalmazza meg, hogy ha a Fourier-Motzkin elimináció nem tilos sorral ér véget, akkor az eredeti lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható.

Farkas-lemma: Az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer pontosan akkor megoldható, ha nem kaphatunk tilos sort, azaz ha nincs olyan nemnegatív y sorvektor, amire $yA = 0$ és $yb < 0$.

(Itt az első 0 sorvektor, a második skalár.)

Formulával: $(\exists x : Ax \leq b) \iff (\nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0)$ $\square$

Megj: A Farkas-lemma nem ad módszert a megoldás (vagy a tilos sor) keresésére. Erre a Fourier-Motzkin-elimináció alkalmas, ahogy ezt korábban láttuk: ha a FM-elimináció után nincs tilos sor, akkor az eliminálás fordított sorrendjében választott értékadásokkal mindig megoldást kapunk, és minden megoldás megkapható így. Bár az FM-elimiáció véges sok lépést igényel, a gyakorlatban nem alkalmazható, mert reménytelenül nagy a lépésszáma.

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mindig átírhatók csupa „változók lin komb-ja $\leq$ konstans” típusú egyenlőtlenségre.

Mit tanultunk ma?

- Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mindig átírhatók csupa ,,változók lin komb-ja $\leq$ konstans” típusú egyenlőtlenségre.
- Negatív számmal szorzás megfordítja az egyenlőtlenséget, ezért a Gauss-elimináció itt nem működik.

Mit tanultunk ma?

- Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mindig átírhatók csupa „változók lin komb-ja $\leq$ konstans” típusú egyenlőtlenségre.
- Negatív számmal szorzás megfordítja az egyenlőtlenséget, ezért a Gauss-elimináció itt nem működik.
- Fáradságosabb ezért egy x változó eliminálása: a x-et tartalmazó egyenlőtlenségeket átírjuk x-re vonatkozó alsó- és felső becslésekre, majd az így kapott összes alsó-felső becslés párra felírjuk a közbezárt x miatt fennálló egyenlőtlenséget. (Az x-et nem tartalmazó egyenlőtlenségeket is megtartjuk.)

Mit tanultunk ma?

- Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mindig átírhatók csupa ,,változók lin komb-ja $\leq$ konstans'' típusú egyenlőtlenségre.
- Negatív számmal szorzás megfordítja az egyenlőtlenséget, ezért a Gauss-elimináció itt nem működik.
- Fáradságosabb ezért egy x változó eliminálása: a x-et tartalmazó egyenlőtlenségeket átírjuk x-re vonatkozó alsó- és felső becslésekre, majd az így kapott összes alsó-felső becslés párra felírjuk a közbezárt x miatt fennálló egyenlőtlenséget. (Az x-et nem tartalmazó egyenlőtlenségeket is megtartjuk.)
- Ha tilos sor adódik, akkor nincs megoldás. Ha az összes ismeretlen eliminálása után sem kapunk tilos sort, akkor az eliminálás fordított sorrendjében történő értékadással bármely megoldást megkaphatunk.

Mit tanultunk ma?

- Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mindig átírhatók csupa „változók lin komb-ja $\leq$ konstans” típusú egyenlőtlenségre.
- Negatív számmal szorzás megfordítja az egyenlőtlenséget, ezért a Gauss-elimináció itt nem működik.
- Fáradságosabb ezért egy x változó eliminálása: a x-et tartalmazó egyenlőtlenségeket átírjuk x-re vonatkozó alsó- és felső becslésekre, majd az így kapott összes alsó-felső becslés párra felírjuk a közbezárt x miatt fennálló egyenlőtlenséget. (Az x-et nem tartalmazó egyenlőtlenségeket is megtartjuk.)
- Ha tilos sor adódik, akkor nincs megoldás. Ha az összes ismeretlen eliminálása után sem kapunk tilos sort, akkor az eliminálás fordított sorrendjében történő értékadással bármely megoldást megkaphatunk.
- A Farkas-lemma szerint pontosan akkor van megoldás, ha semmiképp sem kapható tilos sor.

Mit tanultunk ma?

- Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mindig átírhatók csupa „változók lin komb-ja $\leq$ konstans" típusú egyenlőtlenségre.
- Negatív számmal szorzás megfordítja az egyenlőtlenséget, ezért a Gauss-elimináció itt nem működik.
- Fáradságosabb ezért egy x változó eliminálása: a x-et tartalmazó egyenlőtlenségeket átírjuk x-re vonatkozó alsó- és felső becslésekre, majd az így kapott összes alsó-felső becslés párra felírjuk a közbezárt x miatt fennálló egyenlőtlenséget. (Az x-et nem tartalmazó egyenlőtlenségeket is megtartjuk.)
- Ha tilos sor adódik, akkor nincs megoldás. Ha az összes ismeretlen eliminálása után sem kapunk tilos sort, akkor az eliminálás fordított sorrendjében történő értékadással bármely megoldást megkaphatunk.
- A Farkas-lemma szerint pontosan akkor van megoldás, ha semmiképp sem kapható tilos sor.

Viszontlátásra!