Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

2. pZH javítókulcs (2019. 05. 09.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Írjuk fel ILP problémaként a következő feladatot. Adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nagyságú súlyokból kell legfeljebb k db-ot kiválasztani úgy, hogy az összsúly minél kevesebb, de legalább m legyen.

   Minden a_i súlyhoz tartozzék egy $x(i)$ változó. Az $x(i)$ értéke akkor lesz 1, ha az a_i súlyt kiválasztjuk, egyébként az értéke 0. (2 pont)
   Ekkor a célfüggvény min $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x(i)$, (1 pont)
   ezek a változók a 0 vagy 1 értékek valamelyikét veszik fel, azaz $0 \le x(i) \le 1$, valamint $x(i) \in \mathbb{Z}$ teljesül minden $1 \le i \le n$ indexre. (3 pont)
   Az összsúlynak legalább m-nek kell lennie, azaz $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x(i) \ge m$ (2 pont)
   valamint legfeljebb k súlyt választhatunk: $\sum_{i=1}^{n} x(i) \le k$. (1 pont)
   Ez tehát az ILP feladat. Világos, hogy minden, a feltételeket kielégítő súlyhalmaz megadható ezen feladat megoldásaként, ill. hogy minden megoldás meghatározza az ILP egy megoldását, amelyre az összsúly éppen a célfüggvényben kiszámított érték. (1 pont)

---

2. Legkevesebb hány élt kell behúzni a bal oldali ábrán látható G gráfba ahhoz, hogy a kapott G' gráfnak legyen fülfelbontása?

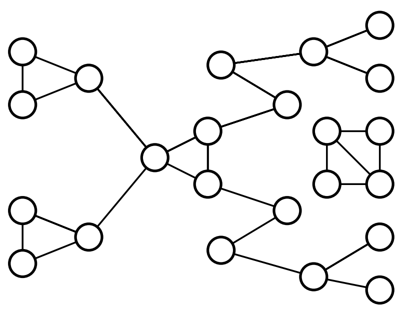
   Mivel fülfelbontása pontosan a 2-élösszefüggő gráfoknak van, ezért a keresett élszám megegyezik azon élek minimális számával, amelyek hozzáadásától G 2-élösszefüggővé válik. (4 pont)
   Mivel G-nek 6 db levél 2-komponense és 1 db izolált 2-kompnense van, (2 pont)
   ezért az órán tanultak szerint a keresett minimális élszám $\lceil \frac{6+2\cdot 1}{2} \rceil = 4$, (3 pont)
   ez tehát a válasz a feladat kérdésére is. (1 pont)

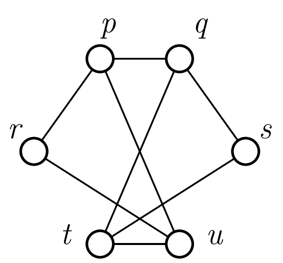
   A feladat nem igényli, hogy megtaláljunk egy optimális élhalmazt. Természetesen az is helyes befejezés, ha valaki mutat egy 4 élből álló megfelelő élhalmazt (1 pontért), igazolja, hogy ezen élek behúzásától G 2-élösszefüggő lesz (2 pontért), végül pedig azt bizonyítja (pl. levél- ill. izolált 2-kompnensek segítségével), hogy 4-nél kevesebb él nem elég mindehhez (3 pontért).

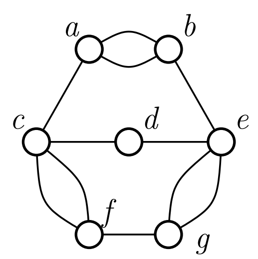
---

3. Határozzunk meg a középső ábrán látható gráfban egy minimális vágást a Nagamochi-Ibaraki-algoritmus segítségével.

   Helyes maxvissza-sorrend számítás (3 pont)
   Helyes összeolvasztások (3 pont)
   Élösszefüggőség megállapítása (2 pont)
   Helyes minvágás (2 pont)







---

4. A jobb oldali ábrán látható gráf egy maxvissza sorrendjében a az utolsó csúcs. Melyik az utolsó előtti csúcs ugyanebben a sorrendben?

   A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kapcsán tanult lemma szerint ha a G egy maxvissza sorrendjének utolsó két csúcsa u és a , akkor $\lambda(u, a) = d(a)$ teljesül. (4 pont)
   Ezért a-ból u-ba van 3 éldiszjunkt út. (3 pont)
   Mivel az ac, be élek elhagyása után a csak b-val kerül egy komponensbe, ezért a-ből csakis b-ba vezethet 3 éldiszjunkt út, máshova nem. (2 pont)
   Ezért a maxvissza sorrendben az utolsó előtti csúcs bizonyosan b volt. (1 pont)

---

5. Tegyük fel, hogy a 4-szeresen élösszefüggő G gráfnak u és v nem szomszédos, negyeddfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy u-nak vannak olyan a és b szomszédai, valamint v-nek olyan c és d szomszédai, hogy a $G' = G - ua - ub - vc - vd + uc + ud + va + vb$ gráf 4-szeresen összefüggő. (4 élt törlünk és 4 élt hozzáveszünk G-hez.)

   Lovász órán tanult leemelési tétele szerint ha a G gráf legalább 4-szeresen élösszefüggő és $d(v)$ páros, akkor a v csúcs teljesen leemelhető úgy, hogy a kapott gráf 4-szeresen élösszefüggő maradjon. (3 pont)
   Ezért az u és a v csúcsra is elvégezhető a teljes leemelés a 4-szeres élösszefüggőség megtartásával. (2 pont)
   Az így kapott gráfba a leemelés során be kell húzni egy ab és egy xy élt az u 4 szomszédja között, ill. a cd és zt élt a v 4 szomszédja között. (2 pont)
   Ha most összecsípjük az ab és zt ill. a cd és xy éleket, akkor egyrészt a feladatban leírt G' gráfot kapjuk, (2 pont)
   másrészt ez az operáció az órán tanultak szerint megőrzi a 4-szeres élösszefüggőséget. A G' gráf tehát csakugyan 4-szeresen élösszefüggő, ahogyan azt a feladat állítja. (1 pont)
