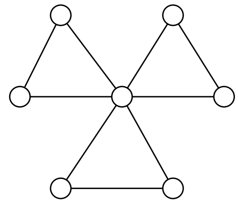
Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

3. pZH javítókulcs (2017. 05. 17.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.



1. Legyen $\mathcal{M}_G$ a jobboldalon látható G gráf körmatroidja. Határozzuk meg az $\mathcal{M}_G$, az $\mathcal{M}_G^*$ és az $\mathcal{M} = \mathcal{M}_G^* \vee \mathcal{M}_G^*$ matroidok rangját, valamint állapítsuk meg, mekkora az $\mathcal{M}_G$ és $\mathcal{M}$ matroidok közös független halmazának maximális elemszáma.

   A körmatroid függetlenjei a körmentes élhalmazok. (1 pont)
   Bázis tehát a G feszítőfája lesz, ami egy 7 pontú gráf esetén 6 élt tartalmaz. Ez mutatja, hogy $r(\mathcal{M}_G) = 6$. (1 pont)
   A duális matroid bázisa a matroid bázisának komplementere. (1 pont)
   G-nek 9 éle van, tehát $r(\mathcal{M}_G^*) = 9 - 6 = 3$. (1 pont)
   Az $\mathcal{M}$ rangjának megállapításához minél több élt kell fedni két, az $\mathcal{M}_G^*$ duális matroifban független élhalmazzal. (1 pont)
   Könnyen látható, hogy az $\mathcal{M}_G^*$ duálisnak van két, egymástól diszjunkt duális bázisa, így $r(\mathcal{M}) = 3 + 3 = 6$. (2 pont)
   Ráadásul e két duális bázis uniója épp a G egy feszítőfája, ezért $\mathcal{M}_G$-nek és $\mathcal{M}$-nek van közös bázisa. (2 pont)
   Ez a közös bázis pedig nyilvánvalóan egy maximális méretű közös független a két matroidban, tehát az utolsó kérdésre 6 a válasz. (1 pont)

---

2. Tegyük fel, hogy az összefüggő G gráfnak 11 blokkja van, de 9 él behúzásával G-t nem lehet 2-szeresen (pont)összefüggővé tenni. Határozzuk meg G elvágó pontjainak számát.

   Az órán tanultak szerint egy összefüggő gráf 2-összefüggővé tételhez szükséges élek minimális száma $x = \max(b(G) - 1, \left\lceil \frac{m(G)}{2} \right\rceil)$, ahol $b(G)$ jelöli egy elvágó pont elhagyása után keletkező új komponensek maximális számát, míg $m(G) = m'(G) + 2m''(G)$, ahol $m'(G)$ levélblokkok, $m''(G)$ pedig az izolált blokkok száma. (3 pont)
   Mivel G összefüggő, ezért $m''(G) = 0$. Innen $m(G) = m'(G) \le 11$ adódik. (1 pont)
   Tehát $\left\lceil \frac{m(G)}{2} \right\rceil \le \left\lceil \frac{11}{2} \right\rceil = 6$. (1 pont)
   A feladat szerint $x \ge 10$, ezért $x = b(G) - 1$ teljesül. (1 pont)
   Mivel $b(G) \le 11$, ezért $x = b(G) - 1 \le 10$. Ebből pedig $x = 10$ és $b(G) = 11$ következik, azaz G-ből egyetlen pontot elhagyva 11 komponens keletkezik. (2 pont)
   Minthogy összesen 11 blokkja van G-nek, ezért G-nek további elvágó pontja nem lehet, azaz a feladatbeli kérdésre pontosan 1 a válasz. (2 pont)

---

3. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráf minden minimális vágása olyan, hogy a vágás éleinek elhagyása után kapott komponensek mindegyike legalább 5 pontot tartalmaz. Tegyük fel továbbá, hogy a Nagamochi-Ibaraki algoritmus futtatása során konstruált első hét max-vissza sorrendben az utolsó csúcs fokszáma rendre $9, 4, 2, 4, 7, 6$ és 3. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t.

A Nagamochi-Ibaraki algoritmusról tanultak szerint a G gráfban a minimális vágás élszáma megegyezik a maxvissza sorrendekben kapott utolsó csúcsok fokszámainak minimumával. Következésképp $\lambda(G) \leq 2$. (3 pont)

Mivel G összefüggő, ezért $\lambda(G) \geq 1$. (2 pont)

Megmutatjuk, hogy $\lambda(G) = 1$ az igazság. Figyeljük meg, hogy a második maxvissza sorrendben az utolsó csúcs fokszáma 2, és ez a csúcs az *eredeti* G gráfnak olyan 2 élű vágását határozza meg, amelyre az egyik komponens 1, 2 vagy 3 pontú. (3 pont)

Ez a 2 élű vágás a feladatban szereplő feltevés miatt nem lehet G-nek minimális vágása, tehát egy minimális vágás legfeljebb egy élt tartalmazhat. Innen adódik, hogy a G gráf élösszefüggősége $\lambda(G) = 1$. (2 pont)