Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

1. ZH javítókulcs (2019. 03. 26.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Az alábbi táblázat A, B, C és D sorai ill. $1, 2, 3$ és 4 oszlopai alkotják a G páros gráf csúcshalmazát, a táblázatbeli számok pedig az adott sor és oszlop között futó él súlyát jelentik. Határozzuk meg az órán tanult módszerrel G egy maximális súlyú M párosítását, és igazoljuk egyúttal, hogy nincs G-ben M-nél nagyobb súlyú párosítás.

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	2	6	3
B	7	5	9	8
C	5	2	7	3
D	7	3	9	5

Az órán tanult Egerváry algoritmus segítségével keresünk teljes párosítást: kiindulunk az oszlopmaximumokhoz ill a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken maximális párosítást keresünk. Ha ez nem teljes, akkor a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhető oszlopokon csökkentünk, a sorokon pedig növeljük a lefogást az alábbiak szerint, addig, amíg lesz a pontos élekből teljes párosítás. (2 pont)

	5	2	7	5	
	5	3	7	6	
	7	5	9	8	
	1	**2**	**3**	**4**	
A	2	$\boxed{2}$	6	3	0 0 0
B	7	5	9	$\boxed{8}$	0 2 3
C	$\boxed{5}$	2	7	3	0 0 0
D	7	3	$\boxed{9}$	5	0 2 2

A kiindulási súlyozott lefogás az $1, 2, 3$ és 4 csúcsokon a megfelelő oszlopmaximum, azaz $7, 5, 9$ és 8, a többi csúcson 0. (2 pont)
Az ábrán az algoritmust követve kapott súlyozott lefogások, bekeretezve pedig egy pontos élekből álló teljes párosítás elemei láthatók. (3 pont)
Egy 24 súlyú párosítást és egy 24 összsúlyú lefogást kaptunk. Utóbbi miatt nem létezik 24-nél nagyobb összsúlyú súlyozott lefogás, azaz a kapott párosítás csakugyan maximális súlyú. (2 pont)
Ezért az $A2, B4, C1, D3$ élek egy maximális súlyú teljes párosítást alkotnak G-ben. (1 pont)

---

2. Állapítsuk meg, hogy van-e valós megoldása az itt látható egyenlőtlenségrendszernek. Ha van megoldás, akkor találjunk egy olyan megoldást, amelyben az x_3 változó értéke a lehető legkisebb.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq -3 \\ 2x_2 + 3x_3 &\geq 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 5x_3 &\leq -7 \end{aligned}$$

Felírjuk a lineáris egyenlőtlenségrendszert mátrixos alakban úgy, hogy az egyenlőtlenségek azonos irányba álljanak, azaz az első két egyenlőtlenséget -1-gyel megszorozzuk. (1 pont)
Végrehajtjuk a Fourier-Motzkin eliminációt, azaz a változókat egymás után elimináljuk úgy, a 0 együtthatós egyenlőtlenségeket megőrizzük, és az összes lehetséges pozitív-negatív együtthatópárra felírjuk azt az összeget, amiben az eliminálandó változó együtthatója 0-vá válik. (2 pont)

Konkrétan: $\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & -7 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & -5 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -13 & -5 \end{array}$ $\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 7 \\ \hline \end{array}$ (3 pont)

A $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \leq 7$ egyenlőtlenség adódott, ezért van megoldás. (1 pont)
Megoldás találásához a változóknak x_3, x_2, x_1 sorrendben adunk értéket, az adott változó eliminációja előtti egyenlőtlenségek figyelembevételével. (1 pont)
Az x_3-ra $-x_3 \leq 1$ és $3x_3 \leq 4$ feltételek állnak, azaz $x_3 \geq -1$ miatt az x_3 minimális értéke $x_3 = -1$. (1 pont)

Ezzel a választással x_2-re $x_2 \leq 6$, $2x_2 \geq 5$ és $3x_2 \geq 18$ adódik, tehát például az $x_2 = 6$ megfelelő. Ekkor x_1-nek az $x_1 \leq 8$, $3x_1 \leq 24$ ill. $2x_1 \geq 16$ feltételeket kell teljesítenie, tehát $x_1 = 8$. (1 pont)

---

3. (a) Oldjuk meg az itt látható LP feladatot!

   (b) Meg lehet-e változtatni a célfüggvényt úgy, hogy az $x_1 = 180, x_2 = 80$ optimális megoldás legyen? Ha igen, akkor mutassunk példát ilyen célfüggvényre!

$$\max\{4x_1 + 5x_2\} \text{ ha}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1 \leq 180$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 600$$
$$2x_1 + x_2 \leq 400$$

Az (x_1, x_2) megoldásokat a síkon ábrázoljuk. Az egyes feltételeknek egy-egy félsík felel meg, a megoldások halmaza pedig e félsíkok metszete, egy konvex taromány lesz. Ezen a tartományon kell optimalizálnunk a célfüggvényt. (1 pont)
A nemnegativitási feltételek a pozitív síknegyedet adják, ebből vág le a három félsík egy konvex ötszöget. Ezen ötszöget határoló egyes egyenesek a 300 és 200, ill. a 200 és 400 pontokban metszik az egyes koordinátatengelyeket, valamint egy egyenes párhuzamos az x_2 tengellyel, az x_1 tengelyt pedig a 180-ban metszi. Egy ezt világosan mutató ábráért is jár a (2 pont)
A szóban forgó ötszög csúcsaira a $(0, 0), (0, 200), (150, 100), (180, 40)$ és a $(180, 0)$ koordinátájú pontok adódnak, a harmadik és negyedik megtalálásához izzadságos számítás vezet. (2 pont)
Bármi is legyen a célfüggvény, az optimumát bizonyosan felveszi a fenti 5 pont valamelyikében, ezért csupán ezek közül kell kiválasztani azt, amelyik a maximalizál. (2 pont)
Ez pedig konkrétan az $x_1 = 150, x_2 = 100$ megoldáshoz tartozik, (1 pont)
az optimumérték pedig 1100. (0 pont)
Mivel a $(180, 80)$ pont az ötszögön kívül helyezkedik el (u.i. nem teljesíti az utolsó egyenlőtlenséget), ezért az nem megoldás, tehát egyetlen célfüggvényre sem lesz optimum. (2 pont)

Aki ebben a feladatban csupán a duális programot írja fel, az bár valójában nem jut lényegesen közelebb a megoldáshoz (hisz a duálist is optimalizálni kell, ráadásul 3 dimenzióban), mégis kap egy pontot.

---

4. Határozzuk meg azt a primál LP problémát aminek a duálisa itt látható.
(Nem tilos felrajzolni egy szamárvezetőt.)

$$\min\{7y_1 - 2y_3\} \text{ ha}$$
$$y_1, y_3 \geq 0$$
$$4y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 77$$
$$y_2 - 5y_3 = 9$$
$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 5$$

Teljesül az egyenlőtlenségek irányáról szóló ökölszabály (minimalizálás mellett nem lehet $\geq$ típusú egyenlőtlenség), ezért felírjuk a szamárvezetőként használt táblázatot. (1 pont)

	$x_1 \geq 0$	x_2	$x_3 \geq 0$	
$0 \leq y_1$	4	0	1	≤ 7
y_2	-2	1	1	$= 0$
$0 \leq y_3$	1	-5	1	≤ -2
	≥ 77	$= 9$	≥ 5	

(3 pont)
Mivel az első és a harmadik duális feltétel egyenlőtlenség, ezért x_1 és x_3 nemnegatív, (2 pont)
az előjelkötetlen y_2-höz egyenlőség tartozik a primál feladatban, a többi feltétel pedig (a maximalizálás miatt) $\leq$ típusú. (2 pont)
Ennek alapján a duális

$$\begin{aligned} \max\{77x_2 + 9x_2 + 5x_3\} & \quad \text{ha} \\ x_1, x_3 & \geq 0 \\ 4x_1 + x_3 & \leq 7 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 & \leq -2 \end{aligned}$$

(2 pont)

---

5. A piréz labdarúgó bajnokságban minden csapat minden másik csapattal egyszer játszik. Tegyük fel továbbá, hogy a bajnokság végeztével sikerült a csapatokat úgy jutalmazni, hogy ha az i csapat legyőzte a j csapatot, akkor az $p(i) - p(j)$ különbség $10^6 \cdot a(i, j)$ és $10^6 \cdot b(i, j)$ PP (piréz peták) közé essék, ahol $p(v)$ a v csapat jutalmát jelöli, valamint $a(i, j) \leq b(i, j)$ egész számok.

Igaz-e, hogy a jutalmazás megvalósítható ekkor úgy is, hogy a fenti feltételek továbbra is teljesüljenek, ám minden csapat egymillió PP többszörösét kapja, ráadásul a szétosztott jutalom összege ne növekedjék ettől?

(Célszerűnek látszik felírni egy, a feladathoz kapcsolódó LP problémát.)

Vezessünk be minden csapathoz egy-egy változót: az i csapathoz tartozzék az $x(i)$. Tekintsük azt a lineáris programozási feladatot, amelyben az $x(1)+x(2)+\dots$ összeget kell maximalizálni, az alábbi feltételek mellett. Minden i-re teljesül, hogy egyrészt $x(i) \geq 0$, másrészt $a(i,j) \leq x(i) - x(j) \leq b(i,j)$ teljesül minden olyan esetben, amikor az i csapat legyőzte a j csapatot. (2 pont)
A feladat szövege alapján a fenti LP probléma megoldható, hisz az $x(i) = p(i)/10^6$ választással a feltételeket kielégítő megoldást kapunk (ami persze nem feltétlenül optimális). (2 pont)
Közelebbről megnézve az adódik, hogy az LP problémához tartozó mátrix két részből áll: az irányított G gráf incidenciamátrixának transzponáltjából ill. ezen transzponált (-1)-szereséből, ahol a G gráf csúcsai a csapatok, és élei pedig a nem döntetlenre végződő mérkőzésekhez tartoznak: az i csapatból a j csapatba akkor fut irányított él, ha az i csapat legyőzte a j csapatot. (2 pont)
A tanultak szerint a szóban forgó mátrix TU tulajdonságú. (2 pont)
Ezért ha a célfüggvényérték alulról korlátos, akkor az optimális megoldások között van olyan is, amelyik esetén minden $x(i)$ változó egész értéket vesz fel. (1 pont)
A nemnegativitási feltételek miatt a célfüggvényérték mindig nemnegatív, így a célfüggvényérték csakugyan alulról korlátos. Ezért a felírt LP-nek van egész optimuma, és az ezen optimális megoldásban szereplő változók egymilliószorosai olyan jutalmazást írnak le, ami teljesíti a feladatban megkívánt feltételeket. (1 pont)

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

2. ZH javítókulcs (2019. 05. 09.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Írjuk fel ILP problémaként a következő feladatot. Adott $G = (V, E)$ gráf csúcsainak keressük olyan maximális méretű U részhalmazát, amely előáll két független ponthalmaz uniójaként, azaz $U = U_1 \cup U_2$, ahol G-nek egyetlen éle sem köt össze két U_1-beli vagy két U_2-beli csúcsot. (Érdemes lehet két karakterisztikus vektorral dolgozni.)

   A G minden v csúcsához tartozzék egy $x(v)$ és egy $y(v)$ változó. Az $x(v)$ értéke akkor lesz 1, ha $v \in U_1$ (egyébként az értéke 0), az $y(v)$ pedig akkor 1, ha $v \in U_2$ (egyébként $y(v) = 0$). (2 pont)
   Ekkor a célfüggvény $\max \tilde{x}(V) + \tilde{y}(V)$, (1 pont)
   ezek a változók a 0 vagy 1 értékek valamelyikét veszik fel: $0 \leq x(v) \leq 1$ és $0 \leq y(v) \leq 1$, valamint $x(v), y(v) \in \mathbb{Z}$ teljesül minden v csúcsra, (3 pont)
   és egyetlen élnek sincs mindkét végpontja U_1-ben vagy U_2-ben: $x(u) + x(v) \leq 1$ ill. $y(u) + y(v) \leq 1$ teljesül G minden uv élére, (2 pont)
   valamint egyetlen v csúcs sem számíthat bele egyszerre U_1-be és U_2-be is: $x(v) + y(v) \leq 1$ teljesül G minden v csúcsára. (1 pont)
   Ez tehát az ILP feladat. Világos, hogy minden keresett ponthalmaz megadható ezen feladat megoldásaként, ill. hogy minden megoldáshoz definiálhatók az egymástól diszjunkt U_1 és U_2 független ponthalmazok, melyek összmérete éppen a célfüggvényben kiszámított érték. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan fülfelbontása, amelyben pontosan 7 db olyan fül szerepel, ami egyetlen ponton csatlakozik a korábban felépített gráfhoz. Legfeljebb hány elvágó éle és hány (maximális) blokkja lehet G-nek?

   Mivel a fülfelbontás mindig 2-élösszefüggő gráfot eredményez, ezért G bizonyosan 2-élösszefüggő, így elvágó éle nem lehet. Az elvágó élek száma tehát legfeljebb 0. (3 pont)
   A fülfelbontás definíciójából adódóan elvágó pontja G-nek csakis olyan csúcs lehet, ami egy fülfelbontásbeli fül mindkét végével megegyezik. (2 pont)
   Szintén a fülfelbontás mikéntjéből adódik, hogy G minden maximális blokkja tartalmaz olyan fület, amelyik a korábban felépített gráfhoz egy csúcsban csatlakozik. (3 pont)
   Mivel 7 ilyen fül van, ezért G-nek legfeljebb 7 maximális blokkja lehet. (1 pont)
   A 7 blokk el is érhető, hiszen pl. annak a gráfnak, ami 7 db pontdiszjunkt kör egy-egy csúcsának összeolvasztásából származik, van ilyen fülfelbontása. (1 pont)

   Mivel a fülfelbontásban olyan fül is szerepel, amelyiknek a két végpontja megegyezik, ezért a feladat szövegéből az következik, hogy itt a 2-élösszefüggő gráfok fülfelbontásáról van szó (amelyik egy pontból indul és az első fül két végpontja megegyezik), és nem pedig a 2-összefüggő gráfok fülfelbontásáról (amelyik egy körből indul). Ha azonban valaki körből indulónak gondolta a fülfelbontást, és ezért a végeredmény 8 lett, azért nem jár pontlevonás.

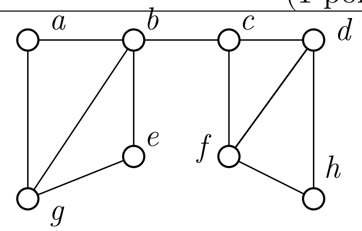
3. Tegyük fel, hogy a G gráfnak pontosan két elvágó pontja és pontosan 10 (maximális) blokkja van. Melyik az a legkisebb k érték, amire igaz, hogy a G gráf k él behúzásával garantáltan 2-szeresen pontösszefüggővé tehető?

   Az órán azt tanították, hogy a 2-összefüggőség eléréséhez pontosan $\max\{\lceil \frac{m(G)+2m'(G)}{2} \rceil, b(G) - 1\}$ a behúzandó élek minimális száma, ahol $m(G)$ a levélblokkok száma, $m'(G)$ az izolált blokkok száma, $b(G)$ pedig az ugyanazon elvágó pontot tartalmazó maximális blokkok maximális száma. (4 pont)
   Mivel összesen 10 blokk és két elvágó pont van ezért nem illeszkedik minden maximális blokk ugyanarra az

elvágó pontra, azaz $b(G) \leq 9$, tehát $b(G) - 1 \leq 8$. (2 pont)
Ha van olyan maximális blokk, amelyik mindkét elvágó pontot tartalmazza, akkor ez a blokk sem nem levél, sem nem izolált blokk, ezért az izolált blokkok száma legfeljebb 7. Innen $m(G) + 2m'(G) \leq 2 + 2 \cdot 7 = 16$ adódik, azaz $\frac{m(G)+2m'(G)}{2} \leq 8$. (1 pont)
Ha pedig a két elvágó pontot nem tartalmazza ugyanaz a maximális blokk, akkor legfeljebb 6 izolált blokk lehet, így $m(G) + 2m'(G) \leq 4 + 2 \cdot 6 = 16$, azaz $\frac{m(G)+2m'(G)}{2} \leq 8$. (1 pont)
Azt kaptuk, hogy 8 él behúzásával G mindenképpen 2-összefüggővé tehető. (1 pont)
Hét él azonban nem biztos, hogy elég, pl ha ugyanazt az elvágó pontot 9 maximális blokk tartalmazza, ezek egyike pedig tartalmaz egy másik elvágó pontot, amihez a tizedik maximális blokk is csatlakozik, akkor ez a gráf megfelel a feladatbeli feltételeknek, és $b(G) = 9$ miatt 8 él behúzása szükséges a 2-összefüggőség eléréséhez. A feladat kérdésére tehát 8 a válasz. (1 pont)

---

4. Vannak-e az ábrán látható gráfnak olyan u és v csúcsai, amelyek közti élösszefüggőségre $\lambda(u, v) = d(v)$ teljesül? Ha van, akkor keressünk ilyen csúcspárt, ha nincs, bizonyítsuk be, hogy nem létezik ilyen.



A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kapcsán tanult lemma szerint ha u és v a G egy maxvissza sorrendjének utolsó két csúcsa, akkor $\lambda(u, v) = d(v)$ tlejesül. (4 pont)
Tehát van ilyen csúcspár, és egy ilyen kereséséhez mindössze egy maxvissza sorrendet kell találni. (1 pont)
A konkrét gráfnak például g, a, b, e, c, d, f, h egy maxvissza sorrendje, (4 pont)
ezért az (f, h) megfelelő csúcspár. (1 pont)

Természetesen az is teljes értékű megoldás, ha valaki konrétan bebizonyítja egy csúcspárról, hogy rendelkezik a leírt tulajdonsággal. Például így.

Figyeljük meg, hogy a g csúcs fokszáma 3, a gb, gab, geb pedig három éldiszjunkt gb-út. (6 pont)
Ezért $\lambda(g, b) \geq 3 = d(g) \geq \lambda(g, b)$, vagyis $\lambda(g, b) = d(g)$. (3 pont)
Ezért a feladat kérdésére *igen* a válasz, és például a (b, g) csúcspár redelkezik a feladatban leírt tulajdonsággal. (1 pont)

---

5. Tegyük fel, hogy a 4-szeresen élösszefüggő G gráfnak u és v szomszédos, hatodfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van olyan ux és vy éle, amelyre az említett élek és uv törlésével, valamint egy xy él behúzásával létrejövő $G - uv - ux - vy + xy$ gráf szintén 4-szeresen élösszefüggő.

Lovász órán tanult leemelési tétele szerint ha a G gráf legalább 2-szeresen élösszefüggő és $d(v)$ páros, akkor bármely vx élhez van olyan vy él, hogy a vx, vy élpár leemelése után kapott gráf bármely két v-től különböző csúcsa között a lokális élösszefüggőség legalább $\lambda(G)$ marad. (3 pont)
Ezért (mivel $d(u)$ páros) az u csúcsból az uv élt leemelhetjük valamely ux éllel, majd a keletkezett xv élt (a szintén páros fokszámú) v-ből leemelhetjük egy másik vy éllel. (2 pont)
E két leemelés után megkapjuk a feladatban leírt $G' = G - ux - vy + xy$ gráfot, és Lovász tétele miatt bámely két u-tól és v-től különböző csúcs között legalább 4 marad az élösszefüggőség. (2 pont)
Nekünk azonban a teljes G' gráf 4-szeres élösszefüggőségét kell igazolnunk. Ehhez az immár 4-edfokúvá vált u és v csúcsokat kell teljesen leemelni. Az így kapott gráf továbbra is 4-szeresen élösszeefüggő marad. Ezután a két élpár összecsípésével kaphatjuk vissza a G' gráfot. A $2k$-szorosan élösszefüggő gráfok előállítása kapcsán azt tanították, hogy k él összecsípése megőrzi a k-szoros élösszefüggőséget. Ezt a $k = 2$ esetre alkalmazva adódik, hogy a G' gráf valóban 4-szeresen élösszefüggő, amint azt a feladat állítja. (3 pont)

A fenti megoldásban ügyelni kell arra, hogy Lovász leemelési tételében a lokális összefüggőség csak a leemelési ponttól különböző pontok között marad meg. Ezért van szükség az utolsó 3 pontos részre. Egyszerűbb leírni azt a megoldást, amelyik eleve teljes leemelésekkel operál.

Mivel a $\lambda(G) \geq 2$ és $d(u)$ ill. $d(v)$ párosak, ezért az órán tanultak miatt az u és v csúcsok teljesen leemelhetők, és az így keletkező G^* gráf 4-szeresen élössefüggő marad. (5 pont)
A leemelési konstrukció miatt G^* úgy áll elő, hogy abban x és y szomszédosak lesznek, és ezen kívül G-be még behúzunk 4 élt, mégpedig u és v szomszédai közöttt $2-2$-t. (2 pont)
Ha a G^* gráfban összecsípjük ezt a $2-2$ élt, akkor éppen egy megfelelő G' gráfot kapunk, (1 pont)
és ez az összecsípés operció az órán tanultak miatt megőrzi a 4-szeres élösszefüggőséget. Ezzel a feladat allítását igazoltuk. (2 pont)

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

1. pZH javítókulcs (2019. 05. 17.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Az alábbi táblázat A, B, C és D sorai ill. $1, 2, 3$ és 4 oszlopai alkotják a G páros gráf csúcshalmazát, a táblázatbeli számok pedig az adott sor és oszlop között futó él súlyát jelentik. Határozzunk meg G éleinek egy minimális összsúlyú lefogását, és igazoljuk, hogy nincs G éleinek nincs ennél kisebb összsúlyú lefogása.

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	0	1	9
B	0	8	6	11
C	1	5	7	12
D	9	11	12	16

Az órán tanult Egerváry algoritmus segítségével keresünk teljes párosítást: kiindulunk az oszlopmaximumokhoz ill a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken maximális párosítást keresünk. Ha ez nem teljes, akkor a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhető oszlopokon csökkentünk, a sorokon pedig növeljük a lefogást az alábbiak szerin, addig, amíg lesz a pontos élekből teljes párosítás. (3 pont)

2	7	5	11
3	8	6	11
4	8	7	11
5	8	8	12
6	8	9	13
9	11	12	16

	1	**2**	**3**	**4**	
A	$\boxed{2}$	0	1	9	0 0 0 0 0 0
B	0	$\boxed{8}$	$\underline{6}$	11	0 0 0 0 0 1
C	1	5	7	$\boxed{12}$	0 0 0 1 1 1
D	$\underline{9}$	11	$\boxed{12}$	16	0 3 4 5 6 7

A kiindulási súlyozott lefogás az $1, 2, 3$ és 4 csúcsokon a megfelelő oszlopmaximum, azaz $9, 11, 12$ és 16, a többi csúcson 0. (2 pont)
Az ábrán az algoritmust követve kapott súlyozott lefogások, bekeretezve pedig egy pontos élekből álló teljes párosítás elemei láthatók. (3 pont)
Egy 34 súlyú párosítást és egy 34 összsúlyú lefogást kaptunk. Előbbi miatt nem létezik 34-nél kisebb összsúlyú súlyozott lefogás, azaz a kapott lefogás csakugyan minimális összsúlyú. (3 pont)

---

2. Állapítsuk meg, hogy van-e valós megoldása az itt látható egyenlőtlenségrendszernek. Ha van megoldás, akkor találjunk egy olyan megoldást, amelyben az x_3 változó értéke a lehető legkisebb.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq -3 \\ 2x_2 + 3x_3 &\geq 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 5x_3 &\leq -7 \end{aligned}$$

Felírjuk a lineáris egyenlőtlenségrendszert mátrixos alakban úgy, hogy az egyenlőtlenségek azonos irányba álljanak, azaz az első két egyenlőtlenséget -1-gyel megszorozzuk. (1 pont)
Végrehajtjuk a Fourier-Motzkin eliminációt, azaz a változókat egymás után elimináljuk úgy, a 0 együtthatós egyenlőtlenségeket megőrizük, és az összes lehetséges pozitív-negatív együtthatópárra felírjuk azt az összeget, amiben az eliminálandó változó együtthatója 0-vá válik. (2 pont)

Konkrétan:
$$\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & -7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -13 & -5 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -13 & -5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 7 \\ \hline \end{array}$$
(3 pont)

A $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \leq 7$ egyenlőtlenség adódott, ezért van megoldás. (1 pont)
Megoldás találásához a változóknak x_3, x_2, x_1 sorrendben adunk értéket, az adott változó eliminációja előtti egyenlőtlenségek figyelembevételével. (1 pont)
Az x_3-ra $-x_3 \leq 1$ és $3x_3 \leq 4$ feltételek állnak, azaz $x_3 \geq -1$ miatt az x_3 minimális értéke $x_3 = -1$. (1

pont)
Ezzel a választással x_2-re $x_2 \leq 6$, $2x_2 \geq 5$ és $3x_2 \geq 18$ adódik, tehát például az $x_2 = 6$ megfelelő. Ekkor x_1-nek az $x_1 \leq 8$, $3x_1 \leq 24$ ill. $2x_1 \geq 16$ feltételeket kell teljesítenie, tehát $x_1 = 8$. (1 pont)

---

3. (a) Oldjuk meg az itt látható lineáris programozási feladatot!

   (b) Meg lehet-e változtatni a célfüggvényt úgy, hogy az $x_1 = 20, x_2 = 10$ optimális megoldás legyen? Ha igen, akkor mutassunk példát ilyen célfüggvényre!

$$\begin{aligned} \max\{2x_1 + 3x_2\} &\text{ ha} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\leq 20 \\ x_1 + x_2 &\leq 30 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 50 \end{aligned}$$

Az (x_1, x_2) megoldásokat a síkon ábrázoljuk. Az egyes feltételeknek egy-egy félsík felel meg, a megoldások halmaza pedig e félsíkok metszete, egy konvex taromány lesz. Ezen a tartományon kell optimalizálnunk a célfüggvényt. (1 pont)
A nemnegativitási feltételek a pozitív síknegyedet adják, ebből vág le a három félsík egy konvex ötszöget. Ezen ötszöget határoló egyes egyenesek a 30 és 50, ill. a 30 és 25 pontokban metszik az egyes koordinátatengelyeket, valamint egy egyenes párhuzamos az x_2 tengellyel, az x_1 tengelyt pedig a 20-ban metszi. Egy ezt világosan mutató ábráért is jár a (2 pont)
A szóban forgó ötszög csúcsaira a $(0, 0), (0, 25), (10, 20), (20, 10)$ és a $(20, 0)$ koordinátájú pontok adódnak, a harmadik és negyedik megtalálásához izzadságos számítás vezet. (2 pont)
Bármi is legyen a célfüggvény, az optimumát bizonyosan felveszi a fenti 5 pont valamelyikében, ezért csupán ezek közül kell kiválasztani azt, amelyik a maximalizál. (2 pont)
Ez pedig konkrétan az $x_1 = 10, x_2 = 20$ megoldáshoz tartozik, (1 pont)
az optimumérték pedig 80. (0 pont)
Mivel a $(20, 10)$ pont az ötszögön egyik csúcsa, ezért alkalmas célfüggvényre ez lesz az optimum. Alkalmas célfüggvény például $2x + 3y$ (2 pont)

Aki ebben a feladatban csupán a duális programot írja fel, az bár valójában nem jut lényegesen közelebb a megoldáshoz (hisz a duálist is optimalizálni kell, ráadásul 3 dimenzióban), mégis kap egy pontot.

---

4. Határozzuk meg azt a primál LP problémát aminek a duálisa itt látható.
(Nem tilos felrajzolni egy szamárvezetőt.)

$$\begin{aligned} \max\{2y_1 + 5y_3\} &\text{ ha} \\ y_2, y_3 &\geq 0 \\ 3y_1 + 2y_2 - 4y_3 &\leq 42 \\ y_1 - 5y_2 &= 7 \\ 6y_1 - y_2 + 7y_3 &\geq 11 \end{aligned}$$

---

5. Egy $G = (V, E)$ gráf 2-*faktora* alatt az E egy olyan F részhalmazát értjük, amelyre G minden csúcsából pontosan két F-beli él indul. Tegyük fel, hogy G páros gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ adott súlyfüggvény. Fogalmazzuk meg a maximális súlyú 2-faktor keresésének problémáját ILP feladatként. Igaz-e, hogy a megfelelő LP feladatnak mindig van egész optimuma, azaz az ILP optimuma egyúttal optimuma az LP-nek is?

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

2. pZH javítókulcs (2019. 05. 09.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Írjuk fel ILP problémaként a következő feladatot. Adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nagyságú súlyokból kell legfeljebb k db-ot kiválasztani úgy, hogy az összsúly minél kevesebb, de legalább m legyen.

   Minden a_i súlyhoz tartozzék egy $x(i)$ változó. Az $x(i)$ értéke akkor lesz 1, ha az a_i súlyt kiválasztjuk, egyébként az értéke 0. (2 pont)
   Ekkor a célfüggvény $\min \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x(i)$, (1 pont)
   ezek a változók a 0 vagy 1 értékek valamelyikét veszik fel, azaz $0 \le x(i) \le 1$, valamint $x(i) \in \mathbb{Z}$ teljesül minden $1 \le i \le n$ indexre. (3 pont)
   Az összsúlynak legalább m-nek kell lennie, azaz $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x(i) \ge m$ (2 pont)
   valamint legfeljebb k súlyt választhatunk: $\sum_{i=1}^{n} x(i) \le k$. (1 pont)
   Ez tehát az ILP feladat. Világos, hogy minden, a feltételeket kielégítő súlyhalmaz megadható ezen feladat megoldásaként, ill. hogy minden megoldás meghatározza az ILP egy megoldását, amelyre az összsúly éppen a célfüggvényben kiszámított érték. (1 pont)

---

2. Legkevesebb hány élt kell behúzni a bal oldali ábrán látható G gráfba ahhoz, hogy a kapott G' gráfnak legyen fülfelbontása?

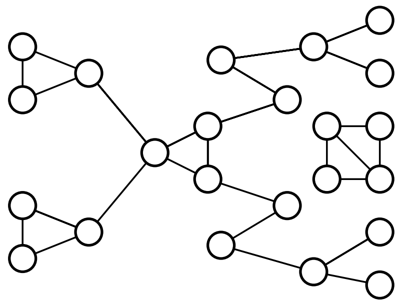
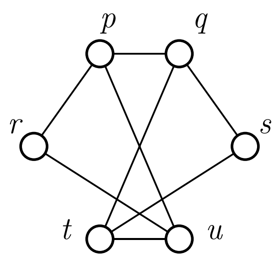
   Mivel fülfelbontása pontosan a 2-élösszefüggő gráfoknak van, ezért a keresett élszám megegyezik azon élek minimális számával, amelyek hozzáadásától G 2-élösszefüggővé válik. (4 pont)
   Mivel G-nek 6 db levél 2-komponense és 1 db izolált 2-kompnense van, (2 pont)
   ezért az órán tanultak szerint a keresett minimális élszám $\lceil \frac{6+2\cdot 1}{2} \rceil = 4$, (3 pont)
   ez tehát a válasz a feladat kérdésére is. (1 pont)

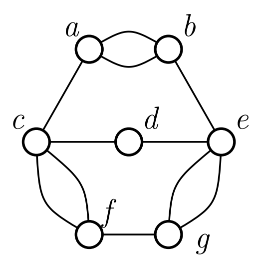
   A feladat nem igényli, hogy megtaláljunk egy optimális élhalmazt. Természetesen az is helyes befejezés, ha valaki mutat egy 4 élből álló megfelelő élhalmazt (1 pontért), igazolja, hogy ezen élek behúzásától G 2-élösszefüggő lesz (2 pontért), végül pedig azt bizonyítja (pl. levél- ill. izolált 2-kompnensek segítségével), hogy 4-nél kevesebb él nem elég mindehhez (3 pontért).

---

3. Határozzunk meg a középső ábrán látható gráfban egy minimális vágást a Nagamochi-Ibaraki-algoritmus segítségével.

   Helyes maxvissza-sorrend számítás (3 pont)
   Helyes összeolvasztások (3 pont)
   Élösszefüggőség megállapítása (2 pont)
   Helyes minvágás (2 pont)



4. A jobb oldali ábrán látható gráf egy maxvissza sorrendjében a az utolsó csúcs. Melyik az utolsó előtti csúcs ugyanebben a sorrendben?

   A Nagamochi-Ibaraki-algoritmus kapcsán tanult lemma szerint ha a G egy maxvissza sorrendjének utolsó két csúcsa u és a , akkor $\lambda(u, a) = d(a)$ teljesül. (4 pont)
   Ezért a-ból u-ba van 3 éldiszjunkt út. (3 pont)
   Mivel az ac, be élek elhagyása után a csak b-val kerül egy komponensbe, ezért a-ből csakis b-ba vezethet 3 éldiszjunkt út, máshova nem. (2 pont)
   Ezért a maxvissza sorrendben az utolsó előtti csúcs bizonyosan b volt. (1 pont)

---

5. Tegyük fel, hogy a 4-szeresen élösszefüggő G gráfnak u és v nem szomszédos, negyeddfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy u-nak vannak olyan a és b szomszédai, valamint v-nek olyan c és d szomszédai, hogy a $G' = G - ua - ub - vc - vd + uc + ud + va + vb$ gráf 4-szeresen összefüggő. (4 élt törlünk és 4 élt hozzáveszünk G-hez.)

   Lovász órán tanult leemelési tétele szerint ha a G gráf legalább 4-szeresen élösszefüggő és $d(v)$ páros, akkor a v csúcs teljesen leemelhető úgy, hogy a kapott gráf 4-szeresen élösszefüggő maradjon. (3 pont)
   Ezért az u és a v csúcsra is elvégezhető a teljes leemelés a 4-szeres élösszefüggőség megtartásával. (2 pont)
   Az így kapott gráfba a leemelés során be kell húzni egy ab és egy xy élt az u 4 szomszédja között, ill. a cd és zt élt a v 4 szomszédja között. (2 pont)
   Ha most összecsípjük az ab és zt ill. a cd és xy éleket, akkor egyrészt a feladatban leírt G' gráfot kapjuk, (2 pont)
   másrészt ez az operáció az órán tanultak szerint megőrzi a 4-szeres élösszefüggőséget. A G' gráf tehát csakugyan 4-szeresen élösszefüggő, ahogyan azt a feladat állítja. (1 pont)

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

1. ZH javítókulcs (2020. 03. 31.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

A beadás után hozott szankciók:	
2 percen túli késéssel beadás:	két percenként 1 pont levonás
Elforgatott kép feltöltése:	2 pont levonás.

1. Bármilyen kemény munka is a locsolkodás, a kijárási korlátozás miatt mindenki csak egy helyen végezheti ezt. Három (fiú)testvér (**A**, **B** és **C**) próbál minél több piros tojást gyűjteni a jeles alkalommal. Öt lehetséges helyre mehetnek (**1**, **2**, **3**, **4** és **5**) és az alábbbi táblázatba gyűjtötték, hogy mennyi tojásra számítanak az egyes locsolók, ha az adott helyen öntöznek Határozzuk meg, hogy legfeljebb hány tojást tudnak ilyen feltételek mellett összegyűjteni. Adjunk ehhez egy locsolási tervet, és mutassuk is meg, hogy az így megszerezhetőnél nem gyűjthető több tojás a fenti feltételek mellett. (Figyelem: három fiú csak három helyen locsolhat!)

	A	**B**	**C**
1	9	11	7
2	13	11	10
3	10	12	9
4	14	20	16
5	10	10	8

Egy maximális súlyú párosítást kell keresnünk abban a páros gráfban, amelyiknek egyik színosztályában az A, B, C, a másikban pedig az $1, 2, 3, 4, 5$ csúcsok vannak. Az élsúlyok a táblázatban látható tojásszámok. (2 pont)

A tanult Egerváry-algoritmust csak négyzetes mátrixokra tudjuk alkalmazni, ezért még bevezetünk két virtuális testvért, akik bárhol 0 tojást tudnak gyűjteni. Ezáltal egy 5×5 méretű táblázatot kapunk, amelyiknek a teljes párosításai megfelelnek a lehetséges tojáslogiksztikáknak. (2 pont)

Ebben az 5×5-ös táblázaban kell tehát az Egerváry-algoritmus segítségével teljes párosítást keresünk: kiindulunk az oszlopmaximumokhoz ill a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken keresünk maximális párosítást. Ha ez nem teljes, akkor a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhető oszlopokon csökkentünk, a sorokon pedig növeljük a lefogást az alábbiak szerint, addig, amíg lesz a pontos élekből teljes párosítás. (1 pont)

	A	**B**	**C**	**D**	**E**				
1	9	11	7	0	$\boxed{0}$	0	0	0	0
2	$\boxed{13}$	11	10	0	0	0	0	0	1
3	10	12	$\boxed{9}$	0	0	0	0	0	0
4	14	$\boxed{20}$	16	0	0	0	1	6	7
5	10	10	8	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0
	14	20	16	0	0				
	13	19	15	0	0				
	13	14	10	0	0				
	12	13	9	0	0				

A kiindulási súlyozott lefogás az **A**, **B**, **C**, **D**, **E** csúcsokon a megfelelő oszlopmaximum, azaz $14, 20, 16, 0$ és 0, a többi csúcson 0. (1 pont)

Az ábrán az algoritmust követve kapott súlyozott lefogások, bekeretezve pedig egy pontos élekből álló teljes párosítás elemei láthatók. (1 pont)

Egy 42 súlyú párosítást és egy 42 összsúlyú lefogást kaptunk. Utóbbi miatt nem létezik 42-nél nagyobb összsúlyú teljes párosítás, ezért az előzetes táblázat alapján a megszerezhető tojások maximális száma pontosan 42. (2 pont)

Ez a maximum pedig úgy érhető el, ha az **A** testvér a **2**-es, a **B** a **4**-es, **C** pedig a **3**-as helyszínen dolgozik. (1 pont)

Az is teljes értékű megoldás, ha megfigyeljük, hogy az **1**-es é **5**-ös helyszínekre senkinek sem érdemes elmennie, hiszen a maradék helyszínek bármelyikén legalább annyi tojást gyűjthtet. Így egy 3×3-as táblázat marad, ahol akár az Egerváry-algoritmussal, akár a 6 lehetőség ellenőrzésével célt érünk.

2. Fourier-Motzkin-elimináció segítségével állapítsuk meg, van-e megoldása az itt látható egyenlőtlenségrendszernek. Ha igen, akkor határozzunk meg egy olyat, amelyikre az x_3 változó a lehető legnagyobb.

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3 &\le 3\\ 2x_1-x_2-2x_3 &\ge 3\\ x_1-2x_2+2x_3 &\le 1\\ 2x_2-x_3 &\le 5 \end{aligned}$$

(Sajnos a feladat kitűzését elrontottam. A feladatlapon szereplő hibás változat megoldása jóval több meddő számolással jár. Sajnálom.)

Felírjuk a lineáris egyenlőtlenségrendszert mátrixos alakban úgy, hogy az egyenlőtlenségek azonos irányba álljanak, azaz a második egyenlőtlenséget -1-gyel megszorozzuk, majd az x együtthatója szerint átrendezzük a feltételeket: felülre vesszük a pozitív együtthatós sorokat, a alulra pedig a 0-kat. (1 pont)
Végrehajtjuk a Fourier-Motzkin eliminációt, azaz a változókat egymás után elimináljuk úgy, hogy a 0 együtthatós egyenlőtlenségeket megőrizzük, és az összes lehetséges pozitív-negatív együtthatópárra felírjuk azt az összeget, amiben az eliminálandó változó együtthatója 0-vá válik. (2 pont)

Konkrétan: $\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & -1 & 5\\ \hline \end{array}$ $\quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 4 & 3 & 0\\ 0 & -3 & 6 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 5\\ \hline \end{array}$ $\quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 5\\ 0 & -3 & 6 & -1\\ \hline \end{array}$ $\quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 33 & -4\\ 0 & 0 & 9 & 13\\ \hline \end{array}$ $\quad \emptyset$ (3 pont)

Üres egyenlőtlenségrendszer adódott, ezért van megoldás. (1 pont)
Konkrét megoldás előállításához a változóknak x_3, x_2, x_1 sorrendben adunk értéket, az adott változó eliminációja előtti egyenlőtlenségek figyelembevételével. (1 pont)
Az x_3-ra $33x_3 \le -4$ és $9x_3 \le 13$ feltételek állnak, azaz x_3 maximális értéke $x_3 = \frac{-4}{33}$. (1 pont)
Ezzel a választással x_2-re $4x_2 \le \frac{12}{33}$, $2x_2 \le 5+x_3$ ill. $3x_2 \ge 1+6x_3 = \frac{9}{33}$ adódik, amiből közös nevezőre hozással az derül ki, hogy $x_2 = \frac{3}{33}$ az egyedüli lehetséges választás. Ekkor x_1-nek a $2x_1 \le 3-\frac{5}{33}$, $x_1 \le 1+\frac{14}{33} = \frac{47}{33}$ ill. $2x_1 \ge 3-\frac{5}{33} = \frac{94}{33}$ feltételeket kell teljesítenie, tehát $x_1 = \frac{47}{33}$. (1 pont)

---

3. Piréziában kétféle pálinkát szabad otthon párolni: 50%-os ill. 80%-os alkoholtartalmút. További szabály, hogy senki sem párolhat 400 liternél több 80%-osat, vagy 600 liternél több 50%-osat. Ezen kívül a kétféle pálinka összalkoholtartalma sem haladhatja meg a 400 litert. A rezsicsökkentés jegyében rögzítették az árakat: az 50%-osat literenkét 100, a 80-százalékosat pedig literenként 150 forintért kell forgalmazni. Mennyit érdemes párolni az egyes fajtákból ahhoz, hogy az eladásból származó bevételünket maximalizáljuk?
(Talán érdemes lenne felírni egy LP feladatot.)

Jelölje x és y az 50 ill. 80%-os változatokból lepárolt mennyiséget. Feladatunk a $100x+150y$ mennyiség maximalizálása. (1 pont)
Az egyes változatokra vonatkozó feltételek $x \le 600$ és $y \le 400$ (a nemnegativitás mellett). (1 pont)
Az alkoholtartalomra vonatkozó korlátozás a $0,5 \cdot x + 0,8 \cdot y \le 400$ feltétellel ekvivalens. (1 pont)
A nemnegativitási feltételek a pozitív síknegyedet adják, ebből vág le a három félsík egy konvex ötszöget.
Az ötszög csúcsai $(0,0), (600,0), (600,125), (160,400), (0,400)$. (3 pont)
Az órán tanultak szerint a konvex tartomány valamelyik csúcsa optimális megoldás lesz, (1 pont)
ezért az egyes csúcsok célfüggvényértékét vizsgáljuk. (1 pont)
Ezek közül a $(600,125)$ pontban vétetik fel a maximum (értéke $60000+18750 = 78750$). (1 pont)
Ezek szerint akkor járunk (bevétel szempontjából) a legjobban, ha 600 liter 50%-os és 125 liter 80%-os pálinkát főzünk. (1 pont)

---

4. Határozzuk meg azt a primál LP problémát aminek a duálisa itt látható.
(Nem tilos szamárvezetőt rajzolni.)

$$\min\{2y_1-7y_3\} \text{ ha}$$
$$\begin{aligned} y_2 &\ge 0\\ y_1-y_2-4y_3 &\le 42\\ 3y_1+7y_2-y_3 &\ge 5\\ y_1+y_2+y_3 &= 33 \end{aligned}$$

Először sztenderd alakba írjuk a DLP-t, azaz mivel mindmalizálunk, ezért mindenhol egyenlőségeknek vagy $\ge$ típusú egyenlőtlenségeknek kell állniuk.
(Középen) (2 pont)
Ezt követően felrajzoljuk a szamárvezetőt. (Jobbra) (1 pont)

$$\min\{2y_1-7y_3\} \text{ ha}$$
$$\begin{aligned} y_2 &\ge 0\\ -y_1+y_2+4y_3 &\ge -42\\ 3y_1+7y_2-y_3 &\ge 5\\ y_1+y_2+y_3 &= 33 \end{aligned}$$

	$0 \le x_1$	$0 \le x_2$	x_3	
y_1	-1	3	1	$= 2$
$0 \le y_2$	1	7	1	≤ 0
y_3	4	-1	1	$= -7$
	≥ -42	≥ 5	$= 33$	

Mivel a DLP-ben maximalizálunk, az LP-ben minimalizálni fogunk. (2 pont)

Csak az y_2-re van nemnegativitási megkötés, ezért az első és harmadik primálfeltétel egyenlőség, a második pedig ($\geq$ típusú) egyenlőtlenség. (2 pont)
Egyedül a harmadik duálfeltétel egyenlőség, ezért kizárólag az x_3 primálváltozóra nincs nemnegativitási feltétel az LP-ben. (2 pont)
Miután a fenti megállapítások szerint kitöltöttük a szamárvezetőt, fel tudjuk írni az keresett LP feladatot. (Jobbra látható.) (1 pont)

$$\begin{aligned} \max\{-42x_1 + 5x_2 + 33x_3\} \quad & \text{ha} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 &\leq 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= -7 \end{aligned}$$

---

5. A korona elleni küzdelemben szerzett múlhatatlan éredemei elismeréseként Pirézia elnökének tiszteletére az ország n focicsapata között szeretnénk egy időben a lehető legtöbb mérkőzést megszervezni. Figyelembe kell azonban venni, hogy a helyi szabályok minden piréz megyére meghatározzák, hogy egy időben hány csapat mérkőzhet az adott megyén kívüli csapattal. (Egy M megye esetén $c(M)$ jelöli ezt a felső korlátot.) További feltétel, hogy a lejátszott mérkőzések legalább a felében két olyan csapatnak kell egymással játszania, amelyek azonos bajnokságban játszanak.

   Írjunk fel egy olyan IP problémát, ami a fenti feladatot oldja meg: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris és esetleges egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt.

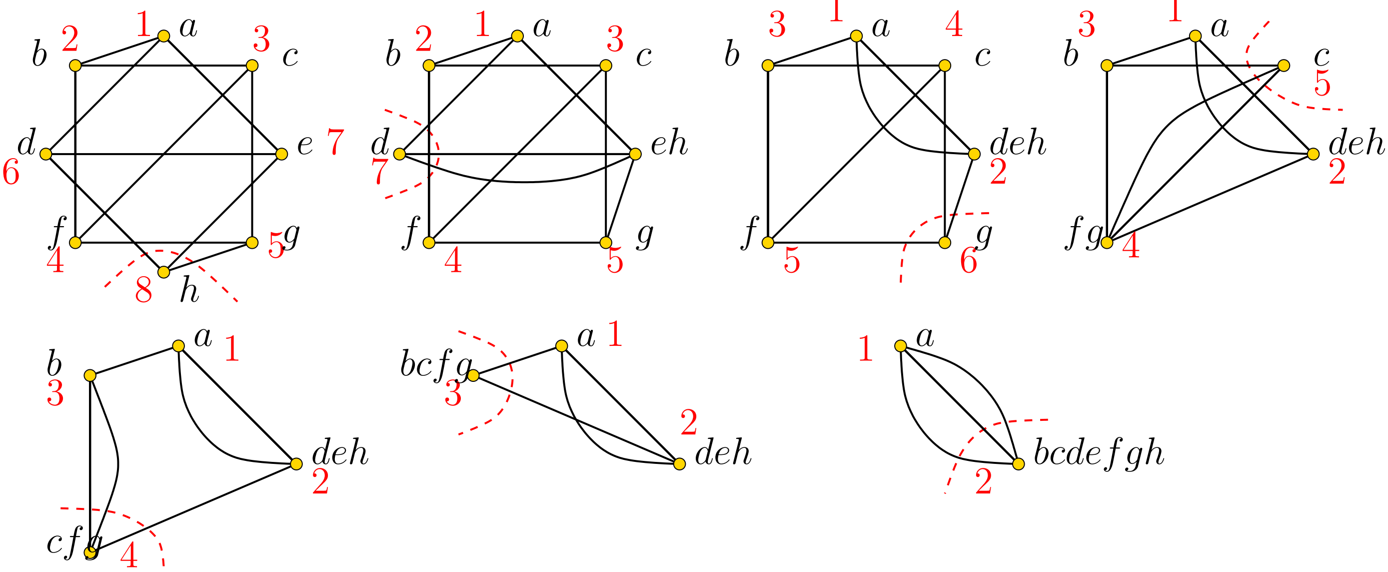
   Vezessünk be az $\binom{n}{2}$ lehetséges mérkőzés mindegyikéhez egy-egy változót: az i és j csapatok által lejátszott (vagy le nem játszott) meccsehez tartozzék az $x(ij)$. (Az $x(ij)$ változót hivatkozhatjuk $x(ji)$-ként is, vagyis e két változó ugyanaz.) A lejátszott meccsek karakterisztikus vektorához keresünk leíró feltételeket. (2 pont)
   Ha egy ilyen karakterisztikus vektorral dolgozunk, akkor a célfüggvény (ami a lejátszott meccsek száma) könnyen felírható: $\max \sum_{\forall i,j} x(ij)$. (1 pont)
   A tanult módon érjük el, hogy karakterisztikus vektorral dolgozzunk: minden $x(ij)$ váltózóhoz tartozik a $0 \leq x(ij) \leq 1$ lineáris feltétel és egy egészértékűségi megkötés. (2 pont)
   A megyékre vonatkozó szabály is lineáris feltételnek felel meg: minden M megyére megkívánjuk, hogy $\sum\{x(ij) : i \in M \not\ni j\} \leq c(M)$ (2 pont)
   Végül arra kell lineáris feltételt felírnunk, hogy a meccseknek legalább felét azonos bajnokságban játszó csapatok játsszák. Ez azzal ekvivalens, hogy legalább annyi meccset játszanak azonos bajnokságban szereplő csapatok, mint amennyit különböző bajnokságban szereplők játszanak. Jelölje U az azonos bajnokságban szereplő csapatok közti (lehetséges) meccsek a halmazát, V pedig azon (lehetséges) meccsekét, amelyben különböző bajnokságban szereplő csapatok az ellenfelek. A szóban forgó feltétel ekkor éppen az $\tilde{x}(U) \geq \tilde{x}(V)$ egyenlőtlenség teljesülésével egyenértékű. (2 pont)
   Mivel minden kívánalmat sikerült átfogalmaznunk IP terminológiára, a fenti feltételek és céfüggvény pontosan a vizsgált problémát írják le. (1 pont)

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

2. ZH javítókulcs (2020. 05. 15.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Határozzuk meg az ábrán látható gráf egy minimális vágását a Nagamochi-Ibaraki-algoritmus segítségével úgy, hogy amikor egy lépés során több csúcsból is lehet választani, mindig azt választjuk, amelyik ABC rendben a legelső lehet.

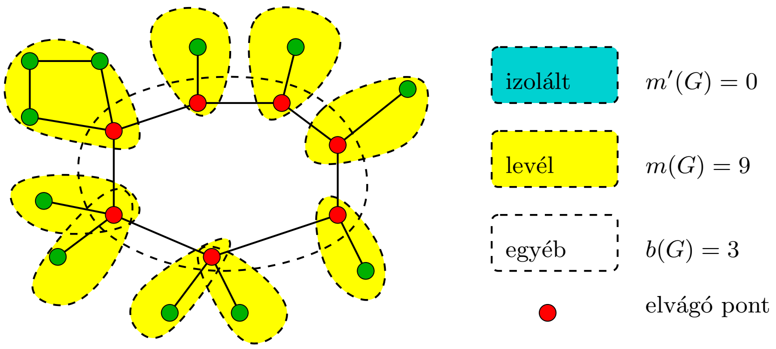


Az algoritmus minden fázisában egy maxvissza sorrendet keresünk a feladatbeli névsormegkötéssel, majd az utolsó csúcsot összeolvasztjuk az utolsó előttivel. Az adott fázis vágásjelöltje a maxvissza sorrend utolsó csúcsa lesz. (3 pont)
Az algoritmus konkrét végrehajtása az ábrán látható. A piros számok a maxvissza sorrendet, a szaggatott vonal a vágásjelöltet mutatják. (6 pont)
Ezek szerint G egy minimális vágását a legkevesebb élt elvágó vágásjelöltből kapjuk, ami a konkrét esetben a $\{b, c, f, g\}$ ill. az $\{a, d, e, h\}$ csúcsok között futó két élből áll. (1 pont)

---

2. Van-e olyan összefüggő gráf, aminek 7 elvágó pontja és 10 maxblokkja van, de mégsem tehető 2-szeresen pontösszefüggővé 4 él behúzásával? Ha van, akkor mutassunk ilyen gráfot és igazoljuk e tulajdonságát, ha nincs, akkor bizonyítsuk be, hogy minden ilyen gráf 2-szeresen összefüggővé tehető legfeljebb 4 él hozzávételével.

Van ilyen gráf, az ábrán adtunk meg egyet. (5 pont)



Az órán tanultak szerint a 2-összefüggőség eléréséhez szükséges élek minimális száma $\max\left(b(G) - 1, \left\lceil \frac{m(G)+m'(G)}{2} \right\rceil\right)$ (2 pont)
A konkrét gráfon $b(G) = 3$ az ugyanazon elvágó pontra illeszkedő maxblokkok száma, $m(G) = 9$ a levélblokkok száma és $m'(G) = 0$ az izolált blokkok száma, (2 pont)
így a formulában a maxium a $\lceil \frac{9}{2} \rceil = 5$ mennyiségen vétetik fel. Ezért a megadott gráf 4 élbehúzásával nem tehető 2-összefüggővé. (1 pont)

3. Tegyük fel, hogy a G gráfnak $v_1, v_2, \ldots, x, y$ és $u_1, u_2, \ldots, y, x$ is egy maxvissza sorrendje. Bizonyítsuk be, hogy $d(x) = d(y)$, azaz ha a maxvissza sorrend $\ldots, x, y$-ra és $\ldots, y, x$-re is tud végződni, akkor a két utolsó csúcs fokszáma megegyezik.

   Az órán azt tanultuk, hogy ha a maxvissza sorrend $\ldots, u, v$-re végződik, akkor $d(v) = \lambda(v, u)$ teljesül. (5 pont)
   Ezek szerint az $\ldots, x, y$ végződés miatt $d(y) = \lambda(y, x)$, az $\ldots, y, x$ végződés miatt $d(x) = \lambda(x, y)$ (3 pont)
   Mivel irányítatlan gráfban két csúcs között az élösszefüggőség mindkét irányból ugyanakkora, ezért $\lambda(x, y) = \lambda(y, x)$, ahonnan $d(x) = d(y)$ következik. (2 pont)

---

4. Hat munka ütemezését kell elvégeznünk, az egyes megmunkálási idők $1, 2, 3, 4, 5$ és 6. Mennyi lesz az átlagos átfutási idő minimuma ha egy gépre ütemezünk? Mennyi lesz az átlagos átfutási idő akkor, ha LPT sorrendben listás ütemezéssel dolgozunk két gépen?

   Az órán tanultak szerint egy gép esetén az SPT sorrend adja a minimális átlagos átfutási időt, azaz, ha a munkákat $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sorrendben végezzük el. (3 pont)
   Ekkor az egyes munkák átfutási ideje $1, 3, 6, 10, 15$ és 21 lesz, ezek átlaga pedig $\frac{56}{6} = \frac{28}{3}$. (2 pont)
   Ha LPT sorrednben dolgozunk két gépen, akkor a 6 ill. 5 megmunkálási idejű munkákkal kezdünk a két gépen, $t = 5$-nél az 5-ös munka végeztével elkezdjük a 4-es munkát, majd $t = 6$-ban elkezdjük a 3-ast. Mindkét utóbbi munka $t = 9$-ben ér véget, ekkor kezdjük a 2-es ill. 1-es munkákat, amelyek $t = 10$-ben ill. $t = 11$-ben érnek véget. (3 pont)
   Az egyes átfutási idők $5, 6, 9, 9, 10$ és 11 lesznek, ezek átlaga pedig az átlagos átfutási idő, konkrétan $\frac{50}{6} = \frac{25}{3}$. (2 pont)

---

5. Előfordulhat-e, hogy ugyanazokat a tárgyakat az FF algoritmus másfélszer annyi ládába pakolja, mint az FFD algoritmus?

   Igen, előfordulhat. Legyenek pl. a tárgyak méretei $0,6$; $0,6$; $0,4$; $0,4$. (5 pont)
   Ezeket az FFD algoritjus két ládába pakolja, mindegyikbe egy nagyot, egy kicsit. (2 pont)
   Ha azonban az FF algoritmust használjuk, és növekvő méret szerint pakolunk, akkor a két kis tárgy elfoglalja az első ládát, és a nagyoknak egy-egy újat kell nyitni. Összesen tehát 3 ládára van szükség, ami 2-nek épp a másfélszerese. (3 pont)

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

1. pZH javítókulcs (2020. 05. 22.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. A G páros gráf élei az $\{A, B, C, D\}$ ill. $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ ponthalmazok között futnak. A mellékelt táblázat az élek súlyát adja meg. Van-e olyan minimális súlyú súlyozott lefogás, amely az A, B, C ill. D. pontokhoz a jobb oldali oszlopban található számokat rendeli?

	1	**2**	**3**	**4**	
A	7	9	7	10	5
B	2	4	3	7	1
C	5	7	3	7	3
D	5	5	4	8	2

(Ha van ilyen, akkor azt adjuk meg, és bizonyítsuk róla, hogy minimális, ha nincs, akkor adjunk meg egy olyan súlyozott lefogást, amely kisebb összsúlyú, mint bármely olyan, ami a jobb oldali oszlopból megkapható.)

	1	**2**	**3**	**4**	
A	7	9	$\boxed{7}$	10	5
B	2	4	3	$\boxed{7}$	1
C	5	$\boxed{7}$	3	7	3
D	$\boxed{5}$	5	4	8	2
	3	4	2	6	

Először úgy választjuk ki a lehető legkisebb súlyokat az $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$ csúcsokhoz, hogy azok a lehető legkisebb összsúlyú súlyozott lefogást alkossák a feladatban meghatározott súlyokkal. Ehhez a táblázat minden oszlopához kiválasztjuk a legnagyobb olyan számot, amit úgy kapunk, hogy az adott oszlop eleméből kivonjuk az adott elem sorában álló előre megadott súlyt. Az így kapott értékek láthatók a bal oldali táblázat alsó sorában. (4 pont)
Az így kapott súlyozott lefogásra pontos élekből található teljes párosítás, pl a bekeretezett mezőkön állók ilyet adnak. (2 pont)
A kapott 26 összsúlyú teljes párosítást miatt minden súlyozott lefogás összsúlya legalább 26. (2 pont)
Mivel a megadott súlyokat egy pontosan 26 összsúlyú súlyozott lefogássá terjesztettük ki, ezért ez egy minimális összsúlyú súlyozott lefogás, a feladat kérdésére tehát igen a válasz. (2 pont)

---

2. Az órán tanult Fourier-Motzkin elimináció segítségével állapítsuk meg, hogy van-e valós megoldása az itt látható egyenlőtlenségrendszernek. (Tehát ha van megoldás, azt nem szükséges konkrétan megadni, bátran használható a mátrixos alak.)

$$x_1 + 4x_2 - 7x_3 \geq 3$$
$$x_1 + 4x_2 - 8x_3 \leq -1$$
$$x_1 + 7x_2 - 1x_3 \leq 12$$
$$x_1 - x_2 - 12x_3 \leq -2$$

Felírjuk a lineáris egyenlőtlenségrendszert mátrixos alakban úgy, hogy az egyenlőtlenségek azonos irányba álljanak, azaz az első egyenlőtlenséget -1-gyel megszorozzuk. (2 pont)
Végrehajtjuk a Fourier-Motzkin eliminációt, azaz a változókat egymás után elimináljuk úgy, hogy először elérjük, hogy az eliminálandó változó együtthatója 0 vagy ± 1 legyen, majd a 0 együtthatós sorokat lemásoljuk, és hozzávesszük az 1 és -1 együtthatós sorokból képzett összes lehetséges összeget. (3 pont)

A konkrét végrehajtás: $\begin{array}{rrr|r} -1 & -4 & 7 & -3 \\ 1 & 4 & -8 & -1 \\ 1 & 7 & -1 & 12 \\ 1 & -1 & -12 & -2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ (3 pont)

A $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \leq -2$ egyenlőtlenség adódott, ami ellentmondás. Tehát a vizsgált egyenlőtlenségrendszernek nincs megoldása. (2 pont)

---

3. Van-e olyan (c_1, c_2) célfüggvény, amire az alábbi LP-nek nincs egészértékű optimuma, azaz nincs olyan optimális (x_1, x_2) megoldása, ahol x_1 és x_2 is egész szám? A választ indokoljuk: ha van ilyen célfüggvény, akkor adjunk meg egy ilyet, ha nincs, akkor bizonyítsuk be, hogy minden célfüggvényhez tartozik egész optimum.

$$\begin{aligned} \min\{c_1x_1 + c_2x_2\} &\text{ ha} \\ x_1 &\ \ge\ 0 \\ x_1 - 4x_2 &\ \ge\ -11 \\ 5x_1 + 4x_2 &\ \le\ 19 \\ 2x_1 - x_2 &\ \le\ 6 \end{aligned}$$

Ha az xy síkon ábrázoljuk a megoldásokat, akkor mindegyik feltétel egy félsíkot jelöl ki, és a megoldások halmazát ezen félsíkor metszete alkotja. (2 pont)
A konkrét esetben az derül ki, hogy az egyenesek páronkénti metszéspontjai által alkotott háromszög lesz a megoldás, melynek csúcsai $(1,3), (5,4)$ és $(7/2, 1)$. (6 pont)
Mivel tetszőleges célfüggvény esetén e háromszög valamelyik csúcsa optimális megoldás lesz, ezért a a feladat kérdésére igen a válasz: pl a $(1,0)$ olyan célfüggvény, amelyre az optimum $(7/2, 1)$, nem rácspont. (2 pont)

---

4. Határozzuk meg azt az LP problémát, aminek a mellékelt egyenlőtlenségrendszer a duálisa.

$$\begin{aligned} \min\{y_1 - 333y_2 + 222y_3\} &\quad \text{ha} \\ y_1, y_2 &\ \ge 0 \\ y_1 - y_2 + 22y_3 &\ \ge 3 \\ 3y_1 - 33y_2 + y_3 &= 55 \\ 7y_1 + 77y_3 &\ge 33 \\ 7y_2 - 17y_3 &\ge 11 \end{aligned}$$

Az órán tanult szabály alapján felírjuk a szamárvezetőként használt táblázatot. (1 pont)

	$x_1 \ge 0$	x_2	$x_3 \ge 0$	$x_4 \ge 0$	
$0 \le y_1$	1	3	7	0	≤ 1
$0 \le y_2$	-1	-33	0	7	≤ -33
y_3	22	1	77	-17	$= 222$
	≥ 3	$= 55$	≥ 333	≥ 11	

(3 pont)

Mivel a DLP-ben a második feltétel egyenlőséggel áll, ezért az x_2 változó előjelkötetlen, a többi nemnegatív. (2 pont)
az előjelkötetlen y_3-hoz tartozó primál feltétel pedig egyenlőséggel teljesül. (2 pont)
Ennek alapján a duális

$$\begin{aligned} \max\{3x_1 + 55x_2 + 33x_3 + 11x_4\} &\quad \text{ha} \\ x_1, x_3, x_4 &\quad \ge 0 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 &\quad \le 1 \\ -x_1 - 33x_2 + 7x_4 &\le -333 \\ 22x_1 + x_2 + 77x_3 - 17x_4 &= 222 \end{aligned}$$

(2 pont)

---

5. Piréziában feloldották a kijárási korlátozást, de azért még nagyon vigyáznak, ne történjen baj. Ezért operatív hajtásokat telepítenek néhány városba azzal a megkötéssel, hogy minden olyan v város esetén, ahova nem települ operatív hajtás, legyen egy v-vel szomszédos u város, ahova települ. Írjunk fel olyan IP problémát, ami a városok szomszédosságát leíró gráf ismeretében meghatározza, mely városokba kerüljenek az operatív hajtások ahhoz, hogy a lehető legkevesebb operatív hajtásra legyen szükség: definiáljunk változókat és határozzuk meg a problémát leíró lineáris ill. egészértékűségi feltételeket.

A megoldást egy karakterisztikus vektor formájában keressük. Minden v városhoz tartozik egy $x(v)$ változó, ami 0 értéket vesz fel, ha nem kell v-be hajtást telepíteni és 1-et, ha az optimális megoldás v-hez hajtást rendel. (2 pont)
A célfüggvény $\min \tilde{x}(V)$ lesz, ahol V a szóban forgó gráf csúcsainak, azaz Pirézia városainak halmaza. (2 pont)
Az $x(v)$ változókra a nemnegativitás mellet az $x(v) \le 1$ egyenlőtlenségek és az egészértékűségi megkötések vonatkoznak. Ennek hatására a megoldásban minden $x(v)$ csakugyan 0 vagy 1 lesz. (2 pont)
Azt a feltételt pedig, hogy minden olyan városnak, ahol nincs hajtás, legyen hajtással rendelkező szomszédja úgy tudjuk lineáris feltételben megfogalmazni, hogy az $x(v) + \tilde{x}(N(v)) \ge 1$ egyenlőtlenséget kívánjuk meg, ahol $N(v)$ jelöli a v város szomszédainak halmazát. (3 pont)

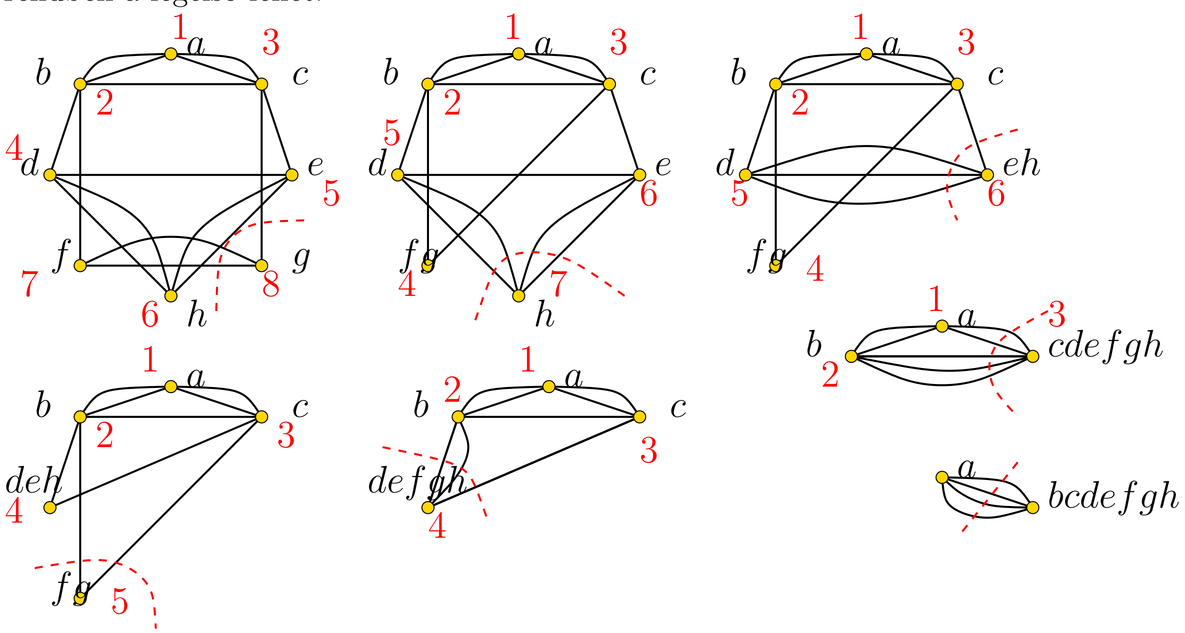
A fenti IP feladat megoldásaiban minden $x(v)$ 0 vagy 1 értéket vesz fel, és az $x(v) + \tilde{x}(N(v)) \geq 1$ feltétel miatt az IP feladat megoldásai pontosan az operatív hajtások a feltételeknek megfelelő telepítései lesznek. A célfüggvény pedig azt minimalizálja, hogy hány helyre is kell ilyen testületet telepíteni. (1 pont)

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

2. pZH javítókulcs (2020. 05. 26.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Határozzuk meg az ábrán látható gráf egy minimális vágását a Nagamochi-Ibaraki-algoritmus segítségével úgy, hogy amikor egy lépés során több csúcsból is lehet választani, mindig azt választjuk, amelyik ABC rendben a legelső lehet.



Az algoritmus minden fázisában egy maxvissza sorrendet keresünk a feladatbeli névsormegkötéssel, majd az utolsó csúcsot összeolvasztjuk az utolsó előttivel. Az adott fázis vágásjelöltje a maxvissza sorrend utolsó csúcsa lesz. (3 pont)
Az algoritmus konkrét végrehajtása az ábrán látható. A piros számok a maxvissza sorrendet, a szaggatott vonalak a vágásjelölteket mutatják. (6 pont)
Ezek szerint G egy minimális vágását a legkevesebb élt elvágó vágásjelöltből kapjuk, ami a konkrét esetben a $\{f, g\}$ ill. az $\{a, b, c, d, e, h\}$ csúcsok között futó két élből áll. (1 pont)

2. Legalább hány komponense van a G gráfnak, ha G-nek 7 elvágó éle van, de bárhogy is húzunk G-be 6 élt, a kapott gráf sosem lesz 2-élösszefüggő?

Az órán tanultak szerint a 2-élösszefüggőség eléréséhez szükséges élek minimális száma $\left\lceil \frac{\ell(G)+\ell'(G)}{2} \right\rceil$, ahol $\ell(G)$ a levél 2-komponensek száma, $\ell'(G)$ pedig az izolált 2-komponenseké. (2 pont)
Ha egy elvágó él két levélkomponenst köt össze, akkor az egyik levélkomponenst izolálttá téve, a másikat pedig egy másik komponens levélkomponenséhez hozzákötve a formula értéke nem változik, ezért feltehető, hogy levélkomponenseket nem köt össze elvágó él. Ezek szerint a levélkomponensekhez különböző elvágó élek tartoznak, így $\ell(G) \leq 7$. (2 pont)
Mivel 6 él behúzása nem elég a 2-élösszefűggőség eléréséhez, ezért $\ell(G) + 2\ell'(G) \geq 13$, vagyis $\ell'(G) \geq 3$. (2 pont)
Ezek szerint a feladatban leírt tulajdonságokkal rendelkező gráfnak legalább 3 levélkomponense van amellett, hogy van olyan komponense is, ami tartalmaz elvágó élt. Tehát az ilyen gráfok legalább 4 komponenssel rendelkeznek. (2 pont)
Könnyű olyan gráfot konstruálni, aminek pontosan 7 elvágó éle van, továbbá $\ell(G) = 7$ és $\ell'(G) = 3$. (1 pont)

3. A Nagamochi-Ibaraki algoritmust egy G gráfon futtattuk. Tegyük fel, hogy a talált maxvissza sorrendekben utolsó csúcsok fokszámai az alábbi sorrendben követték egymást: $13, 7, 10, 4, 10, 6, 11, 7, 5, 8$. Van-e G-nek fülfelbontása? Ha igen, akkor legalább hány élt kell törölni G-ből ahhoz, hogy a kapott gráfnak ne legyen fülfelbontása?

Az órán azt tanították, hogy G-nek pontosan akkor van fülfelbontása, ha 2-élösszefüggő, azaz ha bármely vágása legalább 2 élt tartalmaz. (3 pont)
A Nagamochi-Ibaraki algoritmus G-ben 4 élű minimális vágást talál, tehát G 2-élösszefüggő, így van fülfelbontása. (2 pont)
Ahhoz, hogy ne legyen G-nek fülfelbontása, úgy kell éleket elhagyni, hogy G több komponensre essen szét vagy elvágó éle legyen. (1 pont)
Az előbbihez egy vágás összes élét el kell hagyni, utóbbihoz egy híján mindet. Ezért G egy minimális vágásának kell egy híján minden élét elhagyni. (3 pont)
Mivel G-nek van 4 élű vágása, de kisebb nincs, ezért legaláb 3 élt kell elhagyni ahhoz, hogy a maradék gráfnak ne legyen fülfelbontása. (1 pont)

---

4. Hat munka ütemezését kell elvégeznünk, az egyes megmunkálási idők $1, 2, 3, 4, 5$ és 6. Mennyi lesz az átfutási idő és az átlagos átfutási idő egy gépen LPT sorrendben listás ütemezéssel ill. két gépen SPT sorrendben listás ütemezéssel?

Egy gép esetén az egyes munkák végének időpontjai $6, 11, 15, 18, 20$ és 21 lesznek. (1 pont)
Az átfutási idő tehát 21, (1 pont)
az átlagos átfutási idő pedig $\frac{1}{6} \cdot (6 + 11 + 15 + 18 + 20 + 21) = \frac{91}{6}$. (2 pont)
Két gép esetén az események sorrendje az alábbi. $t = 0$-ban 1-es munkát az I. gépen, a 2-est a II. gépen kezdjük el. $t = 1$-ben az I. gép nekilát a 3-as munkának, $t = 2$-ben a II. gép a 4-esnek. $t = 4$-ben az I. gép elkezdi az 5-ös munkát, $t = 6$-ban pedig a II. gép a 6-ost. Az I. gép $t = 9$-ben, a II. pedig $t = 12$-ben végez. (2 pont)
Ezért az átfutási idő 12, (2 pont)
az átlagos átfutási idő pedig $\frac{1}{6}(1 + 2 + 4 + 6 + 9 + 12) = \frac{34}{6}$. (2 pont)

---

5. Tegyük fel, hogy olyan tárgyakat kell egységnyi kapcitású ládákba pakolni, amely tárgyak mindegyikének a mérete $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ vagy $\frac{1}{24}$ Bizonyítsuk be, hogy az FFD algoritmus által felhasznált számú ládánál kevesebbel nem oldható meg a feladat.

Az FFD algoritmus a konkrét tárgyméretek esetén mindig csak akkor nyit új ládát, ha az előzőt már teljesen megtöltötte. (3 pont)
Az FFD algoritmus ugyanis az $\frac{1}{2}$ méretű tárgyakkal kezd, amikkel néhány ládát teljesen megtölt, esetleg egyet csak félig. Ezeket követik az $\frac{1}{6}$ méretű tárgyak, amivel a félig töltött ládát fel tudja tölteni az algoritmus, és innentől kezdve megint csak akkor nyit új ládát, ha már minden olyan, amibe pakolt, teljesen tele van. Hasonló igaz az $\frac{1}{6}$ méretű tárgyak után feldolgozott $\frac{1}{24}$ méretű tárgyakra. (5 pont)
Ezek szerint az FFD algortmus legfeljebb egy ládát nem tölt ki teljesen. Az így felhasznált ládaszámnál kevesebb láda nem elegendő az elpakolni kívánt tárgyakhoz, hisz ennyi láda űrtartalma kevesebb, mint a tárgyak össztérfogata. Ezért az FFD algoritmus a feladatbeli tárgyakon futtatva mindig optimális megoldást ad. (2 pont)