Kombinatorikus optimalizálás 2023. tavasz

Tudnivalók

6. gyakorlat

2023. április 13.

Def: *Egészprogramozási feladatnak* egy olyan LP vagy DLP feladatot hívunk, ahol további megkötés, hogy a változóknak egész értéket kell felvenniük. Ha LP és DLP duális feladatpár, akkor az x és y-beli változózók egészértékűségét megkívánva kapjuk az IP és DIP egészprogramozási feladatokat.

Megfigyelés: Ha LP egy $\max cx$, DLP pedig egy $\min yb$ típusú feladat és mindkettőnek van megoldása, akkor a megfelelő egészprogramozási feladatokra teljesül, hogy

$$\max_{IP} cx \leq \max_{LP} cx = \min_{DLP} yb \leq \min_{DIP} yb$$

Cél: olyan feltétel, ami biztosítja, hogy a fenti egyenlőtlenségláncban végig egyenlőség álljon.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix *teljesen unimoduláris (TU)*, ha A bármely négyzetes részmátrixának determinánsa 0 vagy ± 1. **Megfigyelés:** TU mátrix minden eleme 0 vagy ± 1.

Állítás: Ha A TU mátrix, akkor TU marad, ha (1) transzponáljuk, (2) valamely sorát/oszlopát (-1)-gyel végigszorozzuk, (3) valamely sorát/oszlopát megismételjük/töröljük, (4) két sorát/oszlopát felcseréljük, (5) A-t egy 1 db 1-esen kívül csupa 0-kat tartalmazó sorral/oszloppal bővítjük.

Tétel: Tfh A TU mátrix és a b vektor koordinátái egészek. Ekkor az így megadott LP feladatra $\max_{IP} cx = \max_{LP} cx$ teljesül. Ha pedig A TU és c egész, akkor a DLP-re teljesül, hogy $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$. Szavakban: TU együtthatómátrix és egész konstansok (ill. célfvegyütthatók) esetén ha az LP-nek (ill. a DLP-nek) van optimuma, akkor az optimumérték egész változókkal megadható megoldáson is felvétetik, vagyis az egészértékűségi megszorítás nem ront az optimum értékén.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf $B(G)$ *illeszkedési mátrixának* (avagy incidenciamátrixának) sorai V-nek, oszlopai E-nek felelnek meg, és a v csúcs és e él által meghatározott (v, e) pozícióban 1 áll, ha e a v-ből kilép, -1, ha belép, és 0, ha v nem végpontja e-nek. Irányítatlan gráf illeszkedési mátrixa hasonló: ha v végpontja e-nek, akkor 1 áll, ha nem akkor 0.

Állítás: Ha G irányított gráf, akkor a $B(G)$ incidenciamátrixa TU tulajdonságú.

Biz: Legyen B a $B(G)$ egy $k \times k$ méretű négyzetes részmátrixa. Azt kell igazolni, hogy $det(B) \in \{0, \pm 1\}$. Indukciót alkalmazunk k szerint. Ha $k = 1$, akkor a determináns a megfelelő elem, ami 0 vagy ± 1. Ha már $k - 1$-ig tudjuk, akkor ha B minden oszlopában két nemnulla áll, akkor B sorösszege $\underline{0}$, így $det(B) = 0$. Ha van olyan oszlop B-ben, ahol legfeljebb egy nemnulla áll, akkor pedig e szerinti kifejtéssel az állítás az indukciós feltevésből adódik.

Köv.: Ha G páros gráf, akkor a $B(G)$ incidenciamátrix TU.

Biz: Irányítsuk G éleit az egyik színosztályba, és a kapott $\vec{G}$ irányított gráf (TU tulajdonságú) incidenciamátrixában szorozzuk meg (-1)-gyel a másik színosztályhoz tartozó sorokat. Így egyrészt a $B(G)$-t kapjuk, másrészt pedig a TU tulajdonság is fennmaradt.

Alkalmazás: Maximális súlyú teljes párosítás keresése egy G páros gráfban megfelel a $\max\{cx : x \geq 0,\ Bx = 1\ x \text{ egész}\}$ IP feladatnak, ahol $B = B(G)$ a G illeszkedési mátrixa. Részletesen kiírva ezt azt kapjuk, hogy $\max\{cx :\ x(e) \geq 0 \forall e, \tilde{x}(E(v)) = 1 \forall v,\ x \text{ egész}\}$ feladatnak. Ennek duálisa $\min\{y \cdot \mathbb{1} : yB \geq c\}$, ami részletesen kiírva $\min\{y \cdot \mathbb{1} : y(u) + y(v) \geq c(e) \forall e = uv\}$. Mit takarnak ezek a formulák? Lássuk.

Thf a páros gráf két csúcshalmazát n vevő ill. n termék alkotja, és egy „megoldásban” minden vevőnek pontosan egy terméket kell kapnia. A c súlyfüggvény $c(vt)$ értéke azt adja meg, hogy a t termék mennyi (pénzben kifejezett) hasznosságot hordoz a v vevő számára. Ekkor a maximális súlyú párosítás annak a megoldásnak felel meg, ami a társadalomban fellépő összhasznosságot maximalizálja. Az y súlyozott lefogásban az egyes termékekhez ill. vevőkhöz tartozó számokat érdemes áraknak ill. profitoknak tekinteni: ha a v vevő megvásárolja a t terméket, akkor a profitja $c(vt) - y(t)$ lesz. A vt él akkor pontos, ha a v vevő az adott árszínvonal mellett akkor jár a legjobban, ha a t terméket vásárolja meg. Az optimális megoldás olyan árszínvonalnak felel meg, amelyik esetén minden vevő tud úgy választani számára maximális profitot biztosító terméket, hogy ezáltal minden termék pontosan egy vevőhöz kerüljön. Ezt hívjuk piaci egyensúlynak. Az Egerváry algoritmusnak az a lépése, ami a súlyozott lefogást változtatja, felfogható egy olyan termékcsoport árcsökkentésének, amire kicsi a kereslet.

Gyakorlatok

1. Egy $G = (V, E)$ gráf 2-*faktora* alatt az E egy olyan F részhalmazát értjük, amelyre G minden csúcsából pontosan két F-beli él indul. Tegyük fel, hogy G páros gráf és $c : E \to \mathbb{R}$

adott súlyfüggvény. Fogalmazzuk meg a maximális súlyú 2-faktor keresésének problémáját IP feladatként. Igaz-e, hogy a megfelelő LP feladatnak mindig van egész optimuma, azaz az IP optimuma egyúttal optimuma az LP-nek is? Írjuk fel az LP duálisát.

2. Adott $G = (V, E)$ gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén fogalmazzuk meg a maximális súlyú párosításfeladatot IP feladatként. Igaz-e, hogy tetszőleges G gráfra az IP optimális megoldása egyúttal a megfelelő LP relaxációnak is optimuma?
3. Adott $G = (V, E)$ gráf esetén írjuk fel IP feladatként a G-beli maximális méretű klikk méretének, azaz $\omega(G)$-nek ill. a maximális méretű független ponthalmaz méretének, azaz $\alpha(G)$-nek a meghatározását.
4. Adott $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ csúcsok és $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény esetén írjuk fel IP (vagy LP) feladatként a legrövidebb st-út meghatározását.
5. A Guváti vállalatnál piros és zöld bigyókat gyártanak. A gyártástechnológiából adódóan havonta összesen legfeljebb 200 bigyót tudnak legyártani, és bármelyik fajta bigyóból legfeljebb 100-zal gyárthatnak többet, mint a másik fajtából. A gyár márciusban 130 piros és 70 zöld bigyót gyártott. Határozzuk meg, mennyi lehet a zöld bigyó a-val jelölt ára, ha tudjuk, hogy a piros bigyót 42 forintért árulják és a vállalat a márciusi termelésével a lehető legtöbb bevételt érte el a fenti feltételek mellett. (Talán érdemes lenne felírni egy LP feladatot.)
6. Piréziában besúgóhálózatot építenek ki a megbízhatónak gondolt célszemélyek beszervezésével. A cél, hogy minden város lakosai között legyen legalább 66 ügynök, ám nem dolgozhat a hálózatban 3-nál több tagja egyetlen családnak sem. Mindezt a lehető legkisebb hálózat kiépítésével szeretnék elérni.

   Írjunk fel egy olyan LP vagy IP feladatot, aminek a megoldásával meghatározható, kiket kell beszervezni a cél elérése érdekében: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris, és esetleges nemnegativitási ill. egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt.
7. A piréz labdarúgó bajnokságban minden csapat minden másik csapattal egyszer játszik. Tegyük fel továbbá, hogy a bajnokság végeztével sikerült a csapatokat úgy jutalmazni, hogy ha az i csapat legyőzte a j csapatot, akkor a $p(i) - p(j)$ különbség $10^6 \cdot a(i, j)$ és $10^6 \cdot b(i, j)$ PP (piréz peták) közé essék, ahol $p(v)$ a v csapat jutalmát jelöli, valamint $a(i, j) \leq b(i, j)$ egész számok.

   Igaz-e, hogy a jutalmazás megvalósítható ekkor úgy is, hogy a fenti feltételek továbbra is teljesüljenek, ám minden csapat egymillió PP többszörösét kapja, ráadásul a szétosztott jutalom összege ne növekedjék ettől?

   (Célszerűnek látszik felírni egy, a feladathoz kapcsolódó LP problémát.)
8. A korona elleni küzdelemben szerzett múlhatatlan éredemei elismeréseként Pirézia elnökének tiszteletére az ország n focicsapata között szeretnénk egy időben a lehető legtöbb mérkőzést megszervezni. Figyelembe kell azonban venni, hogy a helyi szabályok minden piréz megyére meghatározzák, hogy egy időben hány csapat mérkőzhet az adott megyén kívüli csapattal. (Egy M megye esetén $c(M)$ jelöli ezt a felső korlátot.) További feltétel, hogy a lejátszott mérkőzések legalább a felében két olyan csapatnak kell egymással játszania, amelyek azonos bajnokságban játszanak.

   Írjunk fel egy olyan IP problémát, ami a fenti feladatot oldja meg: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris és esetleges egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt.
9. Piréziában az emberek kétfélék: minden polgár vagy oltásszkeptikus vagy oltáshívő. A kormány az átoltottság mihamarabbi elérésének érdekében úgy szeretné levezényelni az oltáskampányt, hogy minden oltásszkeptikusnak legalább 13 oltáshívő facebook-ismerősét beoltsák. (Az oltásszkeptikusok rendkívül aktívak a szociális médiában, mindegyiküknek száz feletti fb-ismerőse van, ezek legalább fele oltáshívő.) Sajnos az oltóanyag csak szűkösen áll rendelkezésre.

   Írjunk fel egy olyan LP vagy IP feladatot, aminek a megoldásával meghatározható, hogyan lehet minimális számú ember beoltásával elérni a kitűzött célt: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris, és esetleges nemnegativitási ill. egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt.

   (A kormány természetesen mindenkiről tudja, melyik csoportba tartozik és kik is a fb-ismerősei.)