Kombinatorikus optimalizálás 2017. tavasz

6. gyakorlat 2017. április 27.

Gyakorlatok

1. Tegyük fel, hogy adott egy $n \times k$ méretű mátrix, melynek minden oszlopa ki van színezve egy színre. (Több oszlop is kaphatja ugyanazt a színt.) Találjunk szükséges és elégséges feltételt arra nézve, hogy kiválasztható csupa különböző színű oszlop a mátrixból úgy, hogy a kiválasztott oszlopok generátorrendszert alkossanak a mátrix oszlopai által feszített altérben.
2. Tegyük fel, hogy a G gráf mindegyik éléhez tartozik egy $\mathbb{R}^n$-beli vektor. Találjunk szükséges és elégséges feltételt arra nézve, hogy mikor van G-nek olyan feszítőfája, amelynek éleihez tartozó vektorok lineárisan függetlenek.
3. Tegyük fel, hogy adott egy $n \times k$ méretű mátrix, melynek minden sora ki van színezve valamilyen színre. (Több sor is kaphatja ugyanazt a színt.) Találjunk szükséges és elégséges feltételt arra nézve, hogy mikor színezhetjük ki az oszlopokat a sorokhoz használt színeket felhasználva úgy, hogy az azonos színű sorok ill. oszlopok meghatározta részmátrixok mindegyikének az oszlopai lineárisan függetlenek legyenek.
4. Tegyük fel, hogy a G gráfnak egyetlenegy elvágó pontja van. Tegyük fel továbbá, hogy a G komplementerének minden e élhez ismert az e kiépítésének költsége. Tervezzünk olyan hatékony algoritmust, amely az iménti inputhoz megtalál egy olyan minimális költségű élhalmazt, melynek kiépítésétől a kapott gráf 2-összefüggővé válik, azaz nem lesz elvágó pontja.
5. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan 2-komponense, amely G minden elvágó élének tartalmazza valamelyik végpontját. Adjunk formulát azon élek minimális számára, amelyeket behúzva G-be a kapott gráf 2-élösszefüggővé válik. (A G gráf 2-komponensei a G gráf tartalmazásra nézve maximális 2-élösszefüggő részgráfjai. A nemtriviális 2-komponensek megkaphatók, mint a G elvágó éleinek elhagyása után keletkező nemtriviális komponensek.)
6. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan maximális blokkja, amely tartalmazza G minden elvágó pontját. Tegyük fel, hogy minden G-ben nem szereplő e élhez ismert az e kiépítésének költsége. Tervezzünk olyan hatékony algoritmust, amely az iménti inputhoz megtalál egy olyan minimális költségű élhalmazt, melynek kiépítésétől a kapott gráf 2-szeresen (pont)összefüggővé válik. (A G gráf blokkjai a G olyan összefüggő részgráfjai, amelyek nem tartalmaznak elvágó pontot.)
7. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfban nem található három egymástól pontdiszjunkt részgráf, melyek mindegyike pontosan egy éllel kapcsolódik a maradék gráfhoz. Mutassuk meg, hogy G legfeljebb egy további él hozzávételével 2-élösszefüggővé tehető.
8. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő gráf, melynek 11 blokkja és 6 elvágó pontja van. Igazoljuk, hogy 5 él behúzásával elérhető, hogy G 2-szeresen (pont)összefüggő legyen.
9. Keressünk minimális vágást a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével egy 6-pontú (nem feltétlenül egyszerű) gráfban.
10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges $G = (V, E)$ gráfban van egy (u_1, v_1) ill. (u_2, v_2) pontpár úgy, hogy $v_1 \neq v_2$ és $\lambda(u_i, v_i) = d(v_i)$ teljesül $i \in \{1, 2\}$ esetén.
11. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével határozzuk meg a G (nem feltétlenül egyszerű) gráf élösszefüggőségét, akkor a max-vissza sorrendben utolsó csúcsok fokszámai rendre az alábbiak: $7, 9, 4, 6, 7, 7, 6, 8, 6, 7, 9$. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t. Állapítsuk meg, legkevesebb hány élt kell behúzni G-be ahhoz, hogy a kapott gráf 6-szorosan élösszefüggő legyen.

Műsorrendváltozás:

május 9, K 10h	május 11, Cs 14h
konzultáció	előadás