Kombinatorikus optimalizálás 2017. tavasz

5. gyakorlat 2017. április 13.

Gyakorlatok

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges véges G gráf esetén ha $\vec{G}$ a G egy tetszőleges irányított változata, és M a $\vec{G}$ illeszkedési mátrixa, akkor az $\mathcal{M}_G$ körmatroid megegyezik az M által definiált mátrixmatroiddal. Igazoljuk ebből, hogy a grafikus matroidok lineárisak.
2. Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráfnak van k éldiszjunkt feszítőfája. Tegyük fel továbbá, hogy az $F_1, F_2, \ldots, F_k$ a G részfái. Mutassuk meg, hogy található a G-ben k éldiszjunkt feszítőfa úgy, hogy azok éleinek uniója az $F_1, F_2, \ldots, F_k$ fák mindegyikét tartalmazza.
3. Tegyük fel, hogy a G gráf mindegyik élét k lehetséges szín valamelyikére kiszíneztük. Jelölje m a legnagyobb olyan G-beli élhalmaz méretét, amely nem tartalmaz kört és csupa különböző színű élből áll. Igazoljuk, hogy ha $V_1, V_2, \ldots, V_t$ a V diszjunkt részhalmazai, és azon élek különböző V_i-ket összekötö élekre összesen ℓ színt használtunk, akkor $m \leq |V_1| + |V_2| + \ldots + |V_t| + \ell$. Mutassuk meg, hogy találhatók olyan diszjukt részhalmazai V-nek, hogy azokra a fenti egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül.
4. Megválasztható-e az alábbi mátrixban a p valós paraméter úgy, hogy a mátrix által reprezentált $\mathcal{M}$ matroidra (1) $\mathcal{M}$ és $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}$ is grafikus legyen; (2) $\mathcal{M}$ grafikus legyen, de $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}$ ne legyen az; (3) $\mathcal{M}$ ne legyen grafikus, de $\mathcal{M} \vee\ M$ az legyen. $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & p & 6 \end{pmatrix}$$
5. Legyen $\mathcal{M}$ a jobboldalon látható mátrix meghatározta lineáris matroid. Határozzuk meg az $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}^*$ összegmatroid rangját, és azt is, hogy konkrétan mi ez a matroid. $$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 & -5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & -1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
6. Legyenek M_1 ill. M_2 a jobb oldalon látható mátrix első három ill. utolsó három sora alkotta mátrixok, és legyenek $\mathcal{M}_1$ ill. $\mathcal{M}_2$ az ezen mátrixokhoz tartozó lineáris matroidok. Igaz-e, hogy a második, harmadik és negyedik oszlopok az $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ matroidok közös független halmazát alkotják? Ha igen, akkor e három oszlop vajon maximális méretű közös független halmaz-e? $$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ -5 & 6 & 2 & 0 & 9 \\ 2 & 9 & 3 & 1 & 5 \\ 11 & 0 & 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$
7. Legyen $\mathcal{M}$ a jobboldalon látható M mátrix meghatározta lineáris matroid. Állapítsuk meg az $\mathcal{M}$ matroid rangját és döntsük el, hogy az $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}$ matroid grafikus-e. $$\begin{pmatrix} 3 & 10 & -5 & 15 & 15 \\ 2 & 7 & -3 & 10 & 11 \\ 3 & 7 & -7 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$