Kombinatorikus optimalizálás 2020. tavasz

4. gyakorlat 2020. április 17.

Tudnivalók

Def: Legyen $G = (V, E)$ multigráf. Ekkor $u, v \in V$ csúcsaira $\lambda(u, v)$ jelöli az u-ból v-be vezető páronként éldiszjunkt utak maximális számát. A G *élösszefüggőségi száma* $\lambda(G) := \min\{\lambda(u, v) : u, v \in V\}$ megegyezik azon élek minimális számával, amelyek elhagyása után G már nem marad összefüggő.

Def: A G *vágása* alatt a G csúcsainak egy valódi X részhamazából induló élek halmazát értjük. A vágást (ha nem okoz félreértést) azonosíthatjuk az azt meghatározó X ponthalmazzal. A G *minimális vágása* a G olyan vágását jelenti, amely a lehető legkevesebb élt tartalmazza.

Megfigyelés: Adott u, v-re egy folyamalgoritmussal meghatározható $\lambda(u, v)$, ezért $\binom{n}{2}$ folyamalgoritmussal található minimális vágás. Sőt: $n - 1$ is elég, hiszen u rögzíthető.

Def: A G multigráf *maxvissza sorrendje* a G csúcsainak olyan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendje, amelyre minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén $d(V_i, v_{i+1}) \geq d(V_i, v_j)$ teljesül, ahol $V_i = \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$, azaz a soron következő csúcs mindig a korábbi csúcsokhoz legtöbb éllel kacsolódó csúcsok egyike.

Lemma: Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$, azaz a v_n-et és v_{n-1}-et szeparáló vágások között az egypontú v_n a lehető legkevesebb élt határozza meg.

Megfigyelés: Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G maxvissza sorrendje és G-nek van olyan minimális vágása, ami szeparálja v_n és v_{n-1}-et, akkor $X = \{v_n\}$ a G egy minimális vágása. Különben, ha nincs v_n-et és v_{n-1}-et szeparáló minimális vágása G-nek, akkor G minimális vágásai megegyeznek a G-ből a v_n és v_{n-1} csúcsok összeragasztásával képzett G' gráf minimális vágásaival.

Nagamochi-Ibaraki-algoritmus Input: $G = (V, E)$ multigráf, Output: G egy X minimális vágása.
I. Meghatározzuk G egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrendjét.
II. Rekurzív hívással meghatározzuk a v_{n-1} és v_n csúcsok összeragasztásával kapott G' gráf egy minimális Y' vágását, ami G-ben Y-nak felel meg.
III. Ha $d(X) \leq d(v_n)$, akkor az output $X = Y$, ha pedig $d(X) > d(v_n)$, akkor $X = \{v_n\}$ az output.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf *elvágó éle* (*elvágó pontja*) a G olyan e éle (olyan v pontja), amelyre $(G - e)$-nek ($(G - v)$-nek) több komponense van, mint G-nek. A *blokk* olyan összefüggő gráf, aminek nincs elvágó pontja. A G gráf 2-*élösszefüggő*, ha G összefüggő és G-nek nincs elvágó éle. A G *maxblokkja* a G maximális blokk részgráfja, a G 2-*komponense* pedig a G tartalmazásra nézve maximális 2-élösszefüggő részgráfja.

Megfigyelés: Tetszőleges G véges, irányítatlan gráf esetén
(1) A G 2-komponensei a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei.
(2) A 2-komponensek faszerűen csatlakoznak egymáshoz G elvágó élei mentén. (Minden 2-komponenst egy-egy csúcsba összevonva G-ből egy körmentes gráfot (erdőt) kapunk.)
(3) A G maximális blokkjai faszerűen csatlakoznak egymáshoz. (Az a $T_2(G)$ gráf, aminek csúcsai a G blokkjai és G elvágó pontjai, élei pedig a blokk-elvágó pont illeszkedések, erdő.)

Def: A G gráf K 2-komonense *levél*, ha K a G-nek pontosan egy elvágó éléhez csatlakozik. A K 2-komonens *izolált*, ha nem csatlakozik hozzá G egyetlen elvágó éle sem, más szóval G egy 2-élösszefüggő kompnense. Ha egy 2-komponenshez legalább 3 elvágó él csatlakozik, akkor az *belső komponens*.

Def: A G gráf *levélblokkja* a G olyan B blokkja, amely G-nek pontosan egy elvágó pontját tartalmazza. A B blokk *izolált*, ha B nem tartalmazza G egyetlen elvágó pontját sem, más szóval a B blokk a G egy kompnense.

Tétel: A G gráfba a 2-élösszefüggőség eléréséhez behúzandó élek minimális száma $\left\lceil \frac{\ell(G)+2\cdot\ell'(G)}{2} \right\rceil$, ahol $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. izolált 2-komponenseinek számát jelöli.

Tétel: A G gráfba a 2-összefüggőség eléréséhez (azaz G blokkjainak összeolvasztásához) behúzandó élek minimális száma $\max\left\{b(G) - 1, \left\lceil \frac{m(G)+2\cdot m'(G)}{2} \right\rceil\right\}$, ahol $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. izolált blokkjai száma, $b(G)$ pedig a G ugyanazon elvágó pontját tartalmazó blokkok maximális száma.

Tétel: Ha G 2-élösszefüggő, akkor G-nek van fülfelbontása, azaz G megkapható egy csúcsból fülek egyenkénti hozzáadásával. Fül alatt itt egy olyan utat értünk, amelynek mindkét végpontja az eddig felépített gráfban van, a többi csúcsa pedig nem szerepel az addig felépített gráfban. A fül két végpontja lehet azonos.

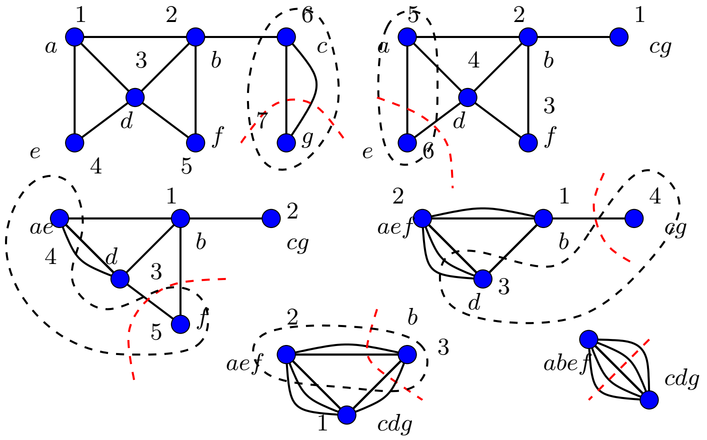
Tétel: Ha G 2-összefüggő, akkor G-nek van fülfelbontása, azaz G megkapható egy körből fülek egyenkénti hozzáadásával. Fül alatt itt egy olyan utat értünk, amelynek két végpontja az eddig felépített gráfon van, a többi csúcsa pedig nem szerepel az addig felépített gráfban. A fül két végpontja nem lehet azonos.

Robbins tétele: A G irányítatlan gráf éleinek pontosan akkor van erősen összefüggő irányítása, ha G 2-élösszefüggű. (A D irányított gráf akkor erősen összefüggő, ha bármely u, v csúcsaira létezik D-ben irányított út u-ból v-be.

Gyakorlatok

1. Keressünk minimális vágást a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével egy 6-pontú (nem feltétlenül egyszerű) gráfban.

   Hát tessék, itt van a példa az előadásról. Esetleg érdemes vmi 6-7 pontú random gráfon is megpróbálni.



2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges $G = (V, E)$ gráfban van egy (u_1, w_1) ill. (u_2, w_2) pontpár úgy, hogy $w_1 \neq w_2$ és $\lambda(u_i, w_i) = d(w_i)$ teljesül $i \in \{1, 2\}$ esetén.

   Az órán azt tanították, hogy a maxvissza sorrend utolsó két pontja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, azaz ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy maxvissza sorrend, akkor $u_1 = v_{n-1}, w_1 = v_n$ jó választás. Csupán egy másik hasonló tulajdonságú (u_2, w_2) párt kell találni úgy, hogy w_2 különbözzék w_1-től. Ehhez elegendő egy másik maxvissza sorrendet találni, aminél garantálni tudjuk, hogy az utolsó csúcs nem w_1 lesz.

   Azért annyira ez se bonyolult: készítsünk úgy egy másik maxvissza sorrendet, hogy w_1 az első csúcs ebben a másik sorrendben. Az utolsó csúcs így garantáltan nem w_1 lesz, tehát az így kapott maxvissza sorrend utolsó két csúcsa megfelel u_2-nek és w_2-nek. □

3. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével határozzuk meg a G (nem feltétlenül egyszerű) gráf élösszefüggőségét, akkor a max-vissza sorrendben utolsó csúcsok fokszámai rendre az alábbiak: $7, 9, 4, 6, 7, 7, 6, 8, 6, 7, 9$. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t. Állapítsuk meg, legkevesebb hány élt kell behúzni G-be ahhoz, hogy a kapott gráf 6-szorosan élösszefüggő legyen.

   Az órán tanultak szerint $\lambda(G)$ megegyezik a Nagamochi-Ibaraki algoritmus során a maxvissza sorrendbeli utolsó csúcsok fokszámai közül a legkisebbikkel. Ez a konkrét esetben $\lambda(G) = 4$-nek adódik.

   Mivel a G gráf 4 él elhagyásával szétvágható, ezért a 6-szoros élösszefüggőség eléréséhez legalább 2 él behúzása szükséges.

   Azt állítjuk, hogy 4 él elegendő is. Vegyük észre, hogy a harmadik összeolvasztás után kapott G_3 gráf élösszefüggősége 6, hiszen G_3-ra a Nagamochi-Ibaraki algoritmus abban különbözik az eredeti G-re végrehajtottól, hogy az utóbbi esetben még három további összeolvasztás miatt három további minvágásjelölt adódik (konkrétan $7, 9$ és 4.

   Az is igaz, hogy az elsőnek összeolvasztott két csúcs között volt 7 pként élidegen út, ezért ezt a két csúcsot a G semmilyen 6-nál kevesebb élt tartalmazó vágása nem szeparálja. Ugyanez elmondható a másodiknak összeolvasztot két csúcsra: ennek a műveletnek a során sem veszett el G-nek 6-nál kevesebb élt tartalmazó vágása. Ezért ha a harmadiknak összeolvasztott két csúcs közé két további élt húzunk, akkor ezáltal a harmadik maxvissza sorrend továbbra is maxvissza sorrend marad, ám a minvágás jelölt immár 6 élt fog tartalmazni. Mivel innentől minden vágásjelölt legalább 6 élt tartalmaz, ezért a két új éllel kiegészített gráf 6-szorosan élösszefüggő lesz. A feladat második kérdésére tehát pontosan 2 a valasz. □

4. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével határozzuk meg a G multigráf élösszefüggőségét, akkor a max-vissza sorrendben utolsó csúcsok fokszámai rendre az alábbiak: $7, 9, 6, 4, 7, 5, 4, 8, 4, 7, 9$. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t. Igaz-e, hogy G-nek bizonyosan van olyan legfeljebb 4 elemű X ponthalmaza, hogy X és a komplementere között futó élek száma megegyezik $\lambda(G)$-vel?

   Az órán tanultak szerint $\lambda(G)$ megegyezik a Nagamochi-Ibaraki algoritmus során a maxvissza sorrendbeli utolsó csúcsok fokszámai közül a legkisebbikkel. (2 pont)
   Ez a konkrét esetben $\lambda(G) = 4$-nek adódik. (1 pont)
   Olyat is tanítottak, hogy $\lambda(v_{n-1}, v_n) = d(v_n)$, azaz a maxvissza sorrend utolsó két pontját elválasztó vágások között minimális számú élt tartalmaz az a vágás, amelynek egyik oldalán a maxvissza sorrendbeli utolsó csúcs áll. (2 pont)
   Mivel minden egyes maxvisszasorrend-számítás után a sorrend két utolsó pontját összeragasztjuk, ezért amikorra a negyedik maxvissza sorrendben az utolsó csúcs foka 4 lett, addig összesen 3 összeragasztást hajtottunk végre. Ezért a negyedik maxvissza sorrend utolsó csúcsa által reprezentált X ponthalmaz G-nek legfeljebb 4 pontját tartalmazhatja. (3 pont)
   Mivel ez az X a G egy minimális vágását határozza meg, ezért a második kérdésre igenlő a válasz: van olyan legfeljebb 4 elemű ponthalmaza G-nek, ami G minimális vágását indukálja. (2 pont)

5. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak egyetlenegy elvágó pontja van. Tegyük fel továbbá, hogy a G komplementerének minden e élhez ismert az e kiépítésének költsége. Tervezzünk olyan hatékony algoritmust, amely az iménti inputhoz megtalál egy olyan minimális költségű élhalmazt, melynek kiépítésétől a kapott gráf 2-összefüggővé válik, azaz nem lesz elvágó pontja.

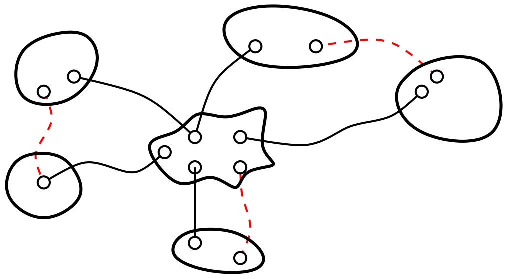
Mivel G összefüggő, ezért azt kell elérni, hogy ne legyen elvágó pontja. Ezt pedig úgy tudjuk megtenni, a v elvágó pont elhagyásával keletkező komponensek közé addig húzunk be éleket, amíg a komplementerek alkotta gráf össziéfüggővé nem válik. Ebből a szempontból kizárólag annak van jelentősége, hogy $G-v$ melyik komponenspárjai között futnak az élek, és az érdektelen, hogy az él a két adott komponensnek konkrétan melyik csúcsait köti össze. Két komponenst szintén nincs értelme két éllel összekötni.

Ezért minden komponenspárra megkeressük az őket összekötő legolcsóbb élt, és csak ezekkel foglalkozunk. Így a feladat nem más, mint a $G-v$ komponensei közé a lehető legolcsóbb módon kell éleket behúzni úgy, hogy összefüggő gráfot kapjunk. Ebben a formában azonban ismerős a feladat, épp a minimális költségű feszítőfa kereséséről van szó. Az eljárásunk tehát az, hogy $G-v$ komponensein, mint csúcsokon egy Kruskal algoritmust futtatunk, ahol két komponens között futó él költsége a két komponens pontjait összekötő élek legolcsóbbikának költsége lesz. □

6. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak van olyan 2-komponense, amely G minden elvágó élének tartalmazza valamelyik végpontját. Adjunk formulát azon élek minimális számára, amelyeket behúzva G-be a kapott gráf 2-élösszefüggővé válik. (A G gráf 2-komponensei a G gráf tartalmazásra nézve maximális 2-élösszefüggő részgráfjai. A nemtriviális 2-komponensek megkaphatók, mint a G elvágó éleinek elhagyása után keletkező nemtriviális komponensek.)

   A feladatbeli feltétel azt jelenti, hogy a szóban forgó 2-komponensen kívül G minden más 2-komponense levélkomponens, és G minden elvágó éle mentén egy-egy ilyen levélkomponens kapcsolódik a szóban forgó 2-komponenshez. Az órán tanult tétel szerint a 2-élöf tulajdonság eléréséhez szükséges élek minimális száma $\left\lceil \frac{\ell(G)+2\ell'(G)}{2} \right\rceil$, és a mi esetünkben $\ell'(G)=0$, $\ell(G)$ pedig G elvágó éleinek száma. Ennek megfelelően a formula nem más, mint $\left\lceil \frac{\ell}{2} \right\rceil$, ahol ℓ a G elvágó éleinek száma.

   A tétel nemtriviális részének alkalmazása nélkül is látszik, hogy ennyi a minimum. Ha ugyanis a levélkomponenseket összepárosítom és a párokat a legolcsóbb rendelkezésre álló él mentén összekötöm, majd az esetlegesen kimaradó levélkomponenst (mondjuk) a központi komponenshez kötöm be, akkor épp $\left\lceil \frac{\ell}{2} \right\rceil$ élt használok, amiknek a behúzása után nem marad elvágó él, tehát G-t csakugyan 2-élöf-vé tettük. □

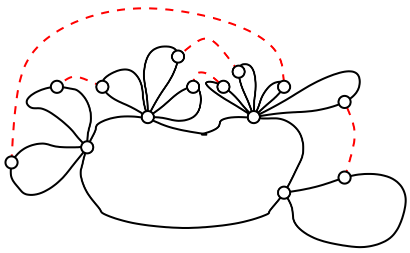


7. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak van olyan maxblokkja, amely tartalmazza G minden elvágó pontját. Tervezzünk olyan hatékony algoritmust, amely az iménti inputhoz megtalál egy olyan minimális méretű élhalmazt, melynek kiépítésétől a kapott gráf 2-szeresen (pont)összefüggővé válik. (A G gráf maxblokkjai a G olyan összefüggő maximális részgráfjai, amelyek nem tartalmaznak elvágó pontot.)

   A szóban forgó maxblokkon kívül minden más maxblokk levél, és a behúzandó élek száma legalább a levélblokkok számának fele. Azonban ugyanazon az elvágó ponton több levélblokk is kapcsolódhat, így figyelni kell arra is, hogy legalább $b(G)-1$ élre van szükség. Az eljárás ezért a következő. Ha a levélblokkok összepárosíthatók úgy, hogy minden pár két tagja különböző elvágó pontokhoz tartozzék (esetleg egy kimaradó maxblokk megengedésével, akkor a párok közé éleket behúzva, a kimaradó maxblokkot pedig tetszőleges másik maxblokkhoz hozzákötve (de nem az elvágó pontjából induló éllel) $\left\lceil \frac{m(G)}{2} \right\rceil$ élt használunk. Ez optimális megoldás.

   Ha viszont nem lehet a levélblokkokat így párosítani, annak az oka, hogy $b(G)$ több mint fele a levélkomponensek számának. Ekkor a $b(G)-1$ db azonos elvágó pontra illeszkedő levélblokkból annyit, amennyit lehet más elvágó ponton ülő maxblokkal kötünk össze, a $b(G)$ maxblokkból ezek után megmaradó k maxblokkot pedig pedig úgy kötözgetem össze $k-1$ éllel, hogy az elvágó pont elhagyásával keletkező részeik összefüggő gráfot alkossanak. (Tkp egy egy fát építek az elvágó pont elhagyásával keletkező komponenseken.)

   Mivel élköltségek is vannak, ezért amikor két maxblokk közé kell élt behúzni, akkor mindig a két rész között futó legolcsóbb élt választjk. □



8. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfban nem található három egymástól pontdiszjunkt részgráf, melyek mindegyike pontosan egy éllel kapcsolódik a maradék gráfhoz. Mutassuk meg, hogy G legfeljebb egy további él hozzávételével 2-élösszefüggővé tehető.

   A feladatbeli feltétel lényegében azt fogalmazza meg, hogy G 2-komponensei között nincs 2-nél több levélkomponens. Mivel G összefüggő, ezért izolált kompnense sincs. Ezek szerint a 2-élöf tulajdonság eléréséhez szükséges új élek száma a levélkomponensek számának a fele, vagyis 1. (Egyébként az is könnyen látszik, hogy G 2-komponensei egy út mentén helyezkednek el, és az út két végén található levélkomponensek közé behúzott él megfelelő a 2-élof tulajdonság eléréséhez. □

9. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő gráf, melynek 11 maxblokkja és 6 elvágó pontja van. Igazoljuk, hogy 5 él behúzásával elérhető, hogy G 2-szeresen (pont)összefüggő legyen.

   A tanultak szerint szükséges élek min. száma $\max(b(G)-1, \left\lceil\frac{m(G)+2m'(G)}{2}\right\rceil)$. Mivel G öf, nincs izolált blokk ($m'(G)=0$) mivel 1-nél több elvágó pont van, ezért nem lehet minden maxblokk levélblokk, tehát $m(G)\leq 10$. Akkor kéne legalább 6 él, ha $b(G)\geq 7$ lenne. De ekkor a 7-es elvágó ponttól különböző minden elvágó pontot tartalmazza egy olyan maxblokk, ami az adott pont elhagyásakor a 7-es elvágó pontot nem tartalmazó komponensbe esik, és ezek a maxblokkok pként különbözők. De ekkor legalább $7+5=12$ maxblokkja lenne G-nek. □

10. Tegyük fel, hogy a G gráfnak olyan fülfelbontása van, amelyben minden fül páratlan sok élt tartalmaz. Mutassuk meg, hogy G minden v csúcsához található G egy olyan M párosítása (azaz közös végpont nélküli éleinek halmaza), hogy a v csúcs kivételével G minden csúcsára illeszkedik M-beli él.

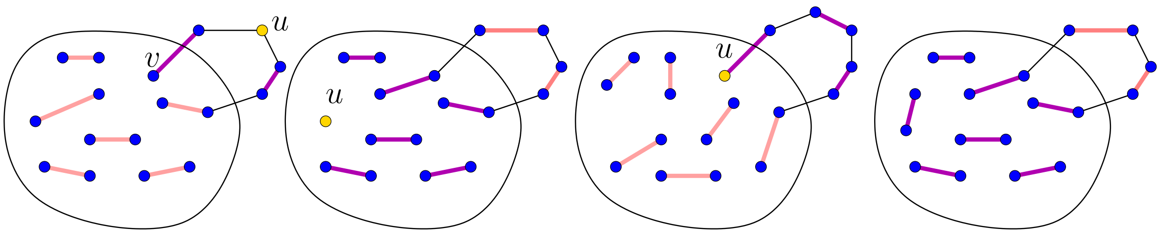
    A feladatban leírt tulajdonsággal rendelkező gráfot a továbbiakban kritikus gráfnak nevezzük.

    Tekintsük G páratlan fülfelbontását. Az első fül egy ptn kör, ez bizonyosan kritikus: bármely csúcsát is hagyjuk el egy ptn körnek, egy páros sok csúcsot tartalmazó utat kapunk, aminek van teljes párosítása. Azt ellenőrizzük, hogy bárhol is állunk meg a fülek felragasztásával, a kapott gráf szintén kritikus lesz. Ehhez azt kell ellenőrizni, hogy ha egy G kritikus gráfra páratlan fület ragasztunk, akkor a kapott G' gráf szintén kritikus lesz.

    Azt kell tehát bizonyítani, hogy G' bármely u csúcsára $(G'-u)$-nak van teljes párosítása. Ha u a fül egy csúcsa,akkor a fül éleiből találunk olyan párosítást, ami a fül minden más csúcsát fedi. Ráadásul a fül páratlan volta miatt a fül egyik végpontját (amit hívjunk v-nek) fedni fogják az így választott élek, a másikat nem. Ezt a párosítást ki lehet egészíteni a $G-v$ gráf egy teljes párosításával, és így megkapjuk $G'-u$ egy teljes párosítását. (Ld. az 1. ábrát. Az első körben választott párosítás éleit sötét, az ezt kiegészítő párosítás éleit világos színnel jelöltük.)

    Ha azonban u nem a fülön, hanem a G gráfon van, akkor $G-u$-nak van teljes párosítása, hisz G kritikus, és a G'-t kialakító fülön páros sok további csúcs van, amiket a fülön lehet kipárosítani. (Ld. a 2. ábrát.)

    Minden u-ra van tehát $G'-u$-nak teljes párosítása, ezért a páratlan fül felragasztása megőrzi a gráf kritikus voltát, ezzel pedig az állítást igazoltuk. □



11. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan fülfelbontása, amelyikben egy fül páros sok, az összes többi pedig páratlan sok élt tartalmaz. Igazoljuk, hogy G-nek van teljes párosítása.

    Tfh a páros fül az u és v csúcsokat köti össze. A páros fül felragasztása előtt a gráf az előző feladat szerint kritikus volt, ezért létezik olyan párosítása, ami u-t fedetlenül hagyja, minden más csúcsot lefed. Ekkor a páros fül éleiből található olyan párosítás, ami a fül csúcsait és u-t fedi, v-t nem. A két párosítás együtt a páros fül felragasztása után keletkező gráf teljes párosítása lesz. (Ld. a 3. ábrát.)

    Minden ezt követő páratlan fül páros sok új csúcsot ad a gráfhoz. Ha a meglévő párosításunkhoz mindig hozzáadjuk a fül belső csúcsait kipárosító fül-éleket, akkor mindig az épp felépített gráf egy teljes párosítását kapjuk. (Ld. a 4. ábrát.)

    Ezért a feladatban leírt G-nek bizonyosan van teljes párosítása. □

12. Igazoljuk, hogy ha G-nek van fülfelbontása, akkor G bármely két fülfelbontása ugyanannyi fület tartalmaz.

    Bármilyen fület is ragasztunk egy gráfra, ennek nyomán az újonnan bevett csúcsai számánál eggyel több új él keletkezik. Mivel a kiindulási gráfnak 1 csúcsa és 0 éle volt, és minden fül 1-gyel növelte az élszám és csúcsszám különbségét, ezért ha G-nek van fülfelbontása, abban pontosan $|E(G)|-|V(G)|+1$ fülnek kell szerepelnie, bármelyik fülfelbontást is tekintjük.