Kombinatorikus optimalizálás 2020. tavasz

4. gyakorlat 2020. április 17.

Tudnivalók

Def: Legyen $G = (V, E)$ multigráf. Ekkor $u, v \in V$ csúcsaira $\lambda(u, v)$ jelöli az u-ból v-be vezető páronként éldiszjunkt utak maximális számát. A G *élösszefüggőségi száma* $\lambda(G) := \min\{\lambda(u, v) : u, v \in V\}$ megegyezik azon élek minimális számával, amelyek elhagyása után G már nem marad összefüggő.

Def: A G *vágása* alatt a G csúcsainak egy valódi X részhamazából induló élek halmazát értjük. A vágást (ha nem okoz félreértést) azonosíthatjuk az azt meghatározó X ponthalmazzal. A G *minimális vágása* a G olyan vágását jelenti, amely a lehető legkevesebb élt tartalmazza.

Megfigyelés: Adott u, v-re egy folyamalgoritmussal meghatározható $\lambda(u, v)$, ezért $\binom{n}{2}$ folyamalgoritmussal található minimális vágás. Sőt: $n - 1$ is elég, hiszen u rögzíthető.

Def: A G multigráf *maxvissza sorrendje* a G csúcsainak olyan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendje, amelyre minden $1 \le i < j \le n$ esetén $d(V_i, v_{i+1}) \ge d(V_i, v_j)$ teljesül, ahol $V_i = \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$, azaz a soron következő csúcs mindig a korábbi csúcsokhoz legtöbb éllel kacsolódó csúcsok egyike.

Lemma: Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$, azaz a v_n-et és v_{n-1}-et szeparáló vágások között az egypontú v_n a lehető legkevesebb élt határozza meg.

Megfigyelés: Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G maxvissza sorrendje és G-nek van olyan minimális vágása, ami szeparálja v_n és v_{n-1}-et, akkor $X = \{v_n\}$ a G egy minimális vágása. Különben, ha nincs v_n-et és v_{n-1}-et szeparáló minimális vágása G-nek, akkor G minimális vágásai megegyeznek a G-ből a v_n és v_{n-1} csúcsok összeragasztásával képzett G' gráf minimális vágásaival.

Nagamochi-Ibaraki-algoritmus Input: $G = (V, E)$ multigráf, Output: G egy X minimális vágása.
I. Meghatározzuk G egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrendjét.
II. Rekurzív hívással meghatározzuk a v_{n-1} és v_n csúcsok összeragasztásával kapott G' gráf egy minimális Y' vágását, ami G-ben Y-nak felel meg.
III. Ha $d(X) \le d(v_n)$, akkor az output $X = Y$, ha pedig $d(X) > d(v_n)$, akkor $X = \{v_n\}$ az output.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf *elvágó éle* (*elvágó pontja*) a G olyan e éle (olyan v pontja), amelyre $(G - e)$-nek ($(G - v)$-nek) több komponense van, mint G-nek. A *blokk* olyan összefüggő gráf, aminek nincs elvágó pontja. A G gráf *2-élösszefüggő*, ha G összefüggő és G-nek nincs elvágó éle. A G *maxblokkja* a G maximális blokk részgráfja, a G *2-komponense* pedig a G tartalmazásra nézve maximális 2-élösszefüggő részgráfja.

Megfigyelés: Tetszőleges G véges, irányítatlan gráf esetén
(1) A G 2-komponensei a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei.
(2) A 2-komponensek faszerűen csatlakoznak egymáshoz G elvágó élei mentén. (Minden 2-komponenst egy-egy csúcsba összevonva G-ből egy körmentes gráfot (erdőt) kapunk.)
(3) A G maximális blokkjai faszerűen csatlakoznak egymáshoz. (Az a $T_2(G)$ gráf, aminek csúcsai a G blokkjai és G elvágó pontjai, élei pedig a blokk-elvágó pont illeszkedések, erdő.)

Def: A G gráf K 2-komonense *levél*, ha K a G-nek pontosan egy elvágó éléhez csatlakozik. A K 2-komonens *izolált*, ha nem csatlakozik hozzá G egyetlen elvágó éle sem, más szóval G egy 2-élösszefüggő kompnense. Ha egy 2-komponenshez legalább 3 elvágó él csatlakozik, akkor az *belső komponens*.

Def: A G gráf *levélblokkja* a G olyan B blokkja, amely G-nek pontosan egy elvágó pontját tartalmazza. A B blokk *izolált*, ha B nem tartalmazza G egyetlen elvágó pontját sem, más szóval a B blokk a G egy kompnense.

Tétel: A G gráfba a 2-élösszefüggőség eléréséhez behúzandó élek minimális száma $\left\lceil \frac{\ell(G)+2\cdot\ell'(G)}{2} \right\rceil$, ahol $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. izolált 2-komponenseinek számát jelöli.

Tétel: A G gráfba a 2-összefüggőség eléréséhez (azaz G blokkjainak összeolvasztásához) behúzandó élek minimális száma $\max\left\{b(G) - 1, \left\lceil \frac{m(G)+2\cdot m'(G)}{2} \right\rceil\right\}$, ahol $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. izolált blokkjai száma, $b(G)$ pedig a G ugyanazon elvágó pontját tartalmazó blokkok maximális száma.

Tétel: Ha G 2-élösszefüggő, akkor G-nek van fülfelbontása, azaz G megkapható egy csúcsból fülek egyenkénti hozzáadásával. Fül alatt itt egy olyan utat értünk, amelynek mindkét végpontja az eddig felépített gráfban van, a többi csúcsa pedig nem szerepel az addig felépített gráfban. A fül két végpontja lehet azonos.

Tétel: Ha G 2-összefüggő, akkor G-nek van fülfelbontása, azaz G megkapható egy körből fülek egyenkénti hozzáadásával. Fül alatt itt egy olyan utat értünk, amelynek két végpontja az eddig felépített gráfon van, a többi csúcsa pedig nem szerepel az addig felépített gráfban. A fül két végpontja nem lehet azonos.

Robbins tétele: A G irányítatlan gráf éleinek pontosan akkor van erősen összefüggő irányítása, ha G 2-élösszefüggű. (A D irányított gráf akkor erősen összefűggő, ha bármely u, v csúcsaira létezik D-ben irányított út u-ból v-be.

Gyakorlatok

1. Keressünk minimális vágást a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével egy 6-pontú (nem feltétlenül egyszerű) gráfban.
2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges $G = (V, E)$ gráfban van egy (u_1, w_1) ill. (u_2, w_2) pontpár úgy, hogy $w_1 \ne w_2$ és $\lambda(u_i, w_i) = d(w_i)$ teljesül $i \in \{1, 2\}$ esetén.
3. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével határozzuk meg a G (nem feltétlenül egyszerű) gráf élösszefüggőségét, akkor a max-vissza sorrendben utolsó csúcsok fokszámai rendre

az alábbiak: $7, 9, 4, 6, 7, 7, 6, 8, 6, 7, 9$. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t. Állapítsuk meg, legkevesebb hány élt kell behúzni G-be ahhoz, hogy a kapott gráf 6-szorosan élösszefüggő legyen.

4. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével határozzuk meg a G multigráf élösszefüggőségét, akkor a max-vissza sorrendben utolsó csúcsok fokszámai rendre az alábbiak: $7, 9, 6, 4, 7, 5, 4, 8, 4, 7, 9$. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t. Igaz-e, hogy G-nek bizonyosan van olyan legfeljebb 4 elemű X ponthalmaza, hogy X és a komplementere között futó élek száma megegyezik $\lambda(G)$-vel?
5. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak egyetlenegy elvágó pontja van. Tegyük fel továbbá, hogy a G komplementerének minden e élhez ismert az e kiépítésének költsége. Tervezzünk olyan hatékony algoritmust, amely az iménti inputhoz megtalál egy olyan minimális költségű élhalmazt, melynek kiépítésétől a kapott gráf 2-összefüggővé válik, azaz nem lesz elvágó pontja.
6. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak van olyan 2-komponense, amely G minden elvágó élének tartalmazza valamelyik végpontját. Adjunk formulát azon élek minimális számára, amelyeket behúzva G-be a kapott gráf 2-élösszefüggővé válik. (A G gráf 2-komponensei a G gráf tartalmazásra nézve maximális 2-élösszefüggő részgráfjai. A nemtriviális 2-komponensek megkaphatók, mint a G elvágó éleinek elhagyása után keletkező nemtriviális komponensek.)
7. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak van olyan maxblokkja, amely tartalmazza G minden elvágó pontját. Tervezzünk olyan hatékony algoritmust, amely az iménti inputhoz megtalál egy olyan minimális méretű élhalmazt, melynek kiépítésétől a kapott gráf 2-szeresen (pont)összefüggővé válik. (A G gráf maxblokkjai a G olyan összefüggő maximális részgráfjai, amelyek nem tartalmaznak elvágó pontot.)
8. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfban nem található három egymástól pontdiszjunkt részgráf, melyek mindegyike pontosan egy éllel kapcsolódik a maradék gráfhoz. Mutassuk meg, hogy G legfeljebb egy további él hozzávételével 2-élösszefüggővé tehető.
9. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő gráf, melynek 11 maxblokkja és 6 elvágó pontja van. Igazoljuk, hogy 5 él behúzásával elérhető, hogy G 2-szeresen (pont)összefüggő legyen.
10. Tegyük fel, hogy a G gráfnak olyan fülfelbontása van, amelyben minden fül páratlan sok élt tartalmaz. Mutassuk meg, hogy G minden v csúcsához található G egy olyan M párosítása (azaz közös végpont nélküli éleinek halmaza), hogy a v csúcs kivételével G minden csúcsára illeszkedik M-beli él.
11. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan fülfelbontása, amelyikben egy fül páros sok, az összes többi pedig páratlan sok élt tartalmaz. Igazoljuk, hogy G-nek van teljes párosítása.
12. Igazoljuk, hogy ha G-nek van fülfelbontása, akkor G bármely két fülfelbontása ugyanannyi fület tartalmaz.