Kombinatorikus optimalizálás 2017. tavasz

4. gyakorlat 2017. március 30.

Tudnivalók

Def: Legyen $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroid. A $C \subseteq E$ halmaz *kör*, ha $C \notin \mathcal{F}$, de $C \neq C' \subseteq C$ esetén $C' \in \mathcal{F}$, azaz a kör minimális összefüggő halmaz. A *hurok* egy egyelemű kör. A $B \subseteq E$ halmaz *bázis*, ha $B \in \mathcal{F}$, de $B \subseteq B' \neq B$ esetén $B' \notin \mathcal{F}$, azaz a bázis egy maximális független halmaz. Az $\mathcal{M}$ matroid köreinek ill. bázisainak halmazát rendre $\mathcal{C}$ ill. $\mathcal{B}$ jelöli. A Z halmaz $r(Z)$-vel jelölt *rangja* a Z-beli maximális független részhalmaz mérete.

Megfigyelés: (B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$. (B2) Ha $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ akkor $|B_1| = |B_2|$, azaz a bázisok mérete egyforma. (B3) Tetsz. $e \in B_1 \in \mathcal{B} \ni B_2$ létezik $f \in B_2$, amire $B_1 - e + f \in \mathcal{B}$.
(C1) $C_1 \mathbb{C}_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \not\subset C_2$. (C2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ és $e \in C_1 \cap C_2$ esetén $\exists C \in \mathcal{C}$, amire $C \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.
(R1) $r(\emptyset) = 0$, (R2) $r(X) \leq |X| \forall X \subseteq E$, (R3) $X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \leq r(Y)$ ill. (R4) $r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y) \forall X, Y \subseteq E$.

Megj.: A fenti tulajdonságokkal definiálható a matroid.

Def: Az $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$ matroid duálisa az az $\mathcal{M}^* = (E, \mathcal{B}^*)$ matroid, amelyre $\mathcal{B}^* = \{E \backslash B : B \in \mathcal{B}\}$

Tétel: Az $\mathcal{M}^*$ duális matroid rangfüggvénye $r^*(X) = |X| - r(E) + r(E \setminus X)$.

Def: Az $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroidból az $X \subseteq E$ halmaz elhagyásával keletkező az $\mathcal{M} \setminus X = (E, \mathcal{F}')$ matroidot kapjuk, ahol $\mathcal{F}' = \{F \in \mathcal{F} : X \cap F = \emptyset\}$.

Def: Az $\mathcal{M} = (E, r)$ matroidból az $X \subseteq E$ halmaz összehúzásával keletkező $\mathcal{M}/X$ matroid rangfüggvénye $R(Z) = r(Z \cup X) - r(X)$

Gyakorlatok

1. Legyen $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Az alábbi halmazrendszerek közül melyik alkotja egy, az S-en értelmezett matroid bázisainak halmazát? (1) $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}\}$, (2) $\{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$?
2. Legyen S egy tetszőleges 10-elemű halmaz. Válasszunk ki S-nek 6 db tetszőleges 9-elemű részhalmazát. Igazoljuk, hogy a kiválasztott halmazok egy matroid bázisait alkotják.
3. Legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_k$ diszjunkt halmazok, $S = \bigcup_{i=1}^k P_i$ és $a_1, \ldots, a_k$ nemnegatív egészek. Definiáljuk az $\mathcal{F} := \{F \subseteq S : |F \cap P_i| \leq a_i \forall i\}$ halmazrendszert. Igazoljuk, hogy $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$ matroid. (A neve *partíciós matroid*.) Mik az $\mathcal{M}$ körei ill. bázisai? Mi a partíciós matroid duálisa? Miféle matroidot kapunk, ha a partíciós matroidban egy elemet összehúzunk ill. törlünk?
4. Legyen $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ egy matroid, $k \in \mathbb{N}$ pedig tetszőleges. Igaz-e, hogy $(E, \mathcal{F}_k)$ is matroid, ahol $\mathcal{F}_k := \{F \in \mathcal{F} : |F| \leq k\}$?
5. Grafikus-e az alábbi mátrixmatroid duálisa? Írjunk fel egy olyan mátrixot, amely az alábbi mátrixmatroid negyedik elemének törlésével ill. összehúzásával kapott matroidot reprezentálja.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf körmatroidja mátrixmatroid.
7. Igazoljuk, hogy tetszőleges uniform matroid mátrixmatroid.
8. Igazoljuk, hogy tetszőleges partíciós matroid mátrixmatroid.
9. Partíciós matroid-e a fenti mátrix által meghatározott matroid?