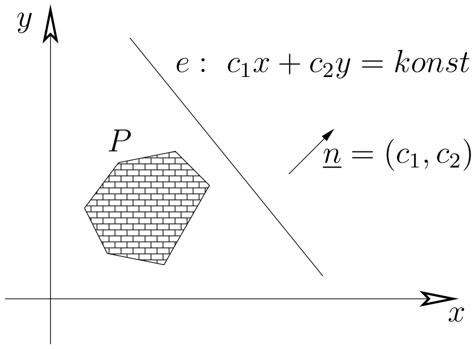
Kombinatorikus optimalizálás 2020. tavasz

3. gyakorlat 2020. március 27.

A gyakorlatok megoldásai

1. Tegyük fel, hogy az x és y változókkal megadott kétváltozós lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldásai az xy-síkon egy P konvex sokszöget alkotnak. Határozuk meg, hogy melyek azok a megoldások, amelyek alkalmasan választott c_1, c_2 értékekkel maximalizálják a $c_1x + c_2y$ célfüggvényértéket. Ha ismerjük a P sokszög csúcsainak koordinátáit, akkor adott a c_1 és c_2, akkor hogyan lehet gyorsan megtalálni egy optimális megoldást?

A P konvex sokszögnek azt az (x, y) pontját (vagy azokat a pontjait) kell megtalálni, amelyre a lehető legnagyobb a c_1x+c_2y összeg. Először vizsgáljuk meg, hogy hol helyezkednek el azok az (x, y) pontok a síkon (P-től függetlenül), amelyekre a c_1x+c_2y összeg konstans, azaz $c_1x+c_2y = konst$. Jól ismert, hogy ez egy e egyenes egyenlete. Ráadásul, ha a *konst* értékét növeljük, akkor ettől az egyenes a (c_1, c_2) normálvektor irányába mozdul el.



Ha tehát a konvex sokszögnek a célfüggvényt maximalizáló pontját keressük, akkor az egyenest a „végtelen távolból” indítva addig kell tolni a P sokszög felé, amíg az eltoltnak közös pontja nem lesz P-vel. (Úgy is mondhatjuk, hogy megkeressük P-nek azt az e-vel párhuzamos *támaszegyenesét*, amitől a (c_1, c_2) normálvektor irányába már nem esik P-nek pontja.) A lineáris egyenlőtlenségrendszernek a $c_1x + c_2y$ célfüggvényt maximalizáló megoldásai tehát az egyenes ezen eltoltjának és P-nek a közös pontjai lesznek.

Világos, hogy ezen optimális megoldások halmaz vagy egy csúcsa vagy egy éle lesz P-nek. Az első esetben pontosan egy, a másodikban pedig pontosan két csúcs lesz optimális megoldás. A feladat tehát egyszerű: P minden csúcsára kiszámítjuk a célfüggvényértéket, és az a csúcs lesz fog maximalizáli, amelyikre a legnagyobb ez a mennyiség. Ha két ilyen csúcs is van, akkor az általuk meghatározott szakasz minden más pontja is optimális megoldás (bár ez nem volt kérdés.

Két változó esetén (két dimenzióban) nagyon szemléletes, hogy ez a helyzet, és három változó (azaz 3 dimenzió) esetén sem nehéz meggyőzni magunkat, hogy ugyanerről van szó azzal a különbzéggel hogy támaszegyenes helyett támaszsíkot keresünk a 3D-beli konvex megoldáshalmazhoz. Szemléletesen nem világos, de precíz matematikai eszközökkel könnyen vizsgálható a 3-nál több változó, azaz a 3-nál magasabb dimenziós megoldástér esete is. Itt is hasonló a helyzet, csak pl. 4 dimenzióban a konvex halmazhoz egy 3-dimenziós támaszhipersíkot kell keresni, és az optimális megoldások között itt is lesz csúcsa a megoldásokat leíró konvex poliédernek. Sajnos egyvalami nem lesz ennyire egyszerű: míg két dimenzióban a sokszögnek annyi csúcsa van, mint ahány oldala (tehát az optimális megoldás-jelöltek száma legfeljebb a lineáris egyenlőtlenségrendszerben szereplő egyenlőtlenségek száma), addig magasabb dimenzióban a poliéder csúcsainak száma nagyságrendekkel több lehet, mint a feladatot leíró feltételek száma. Ezért magasabb dimenzióban nem hatékony úgy keresni az optimumot, hogy a megoldáshalmaz csúcsain ellenőrizzük a célfüggvényértéket.

---

2. Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát!

$$\begin{aligned}
&\min\{x_1 - 2x_2 + x_4\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1\\
&x_1 + x_3 + 5x_4 = 1\\
&x_2 \leq 0
\end{aligned}$$

Először átírjuk sztenderd alakba a feladatot. Mivel minimalizálunk, ezért csak $\geq$ ill $=$ típusú feltételeink lehetnek, azaz az utolsó feltétel $-x_2 \geq 0$ alakot ölt. Ezek után szamárvezetőt készítünk.

$$
\begin{array}{r|cccc|l}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
y_1 \geq 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & \geq 1 \\
y_2 & 1 & 0 & 1 & 5 & = 1 \\
y_3 \geq 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \geq 0 \\
\hline
 & = & = & = & = & \\
 & 1 & -2 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Az y_1, y_2, y_3 duális változók a három primálfeltételhez tartoznak. Mivel az első és a harmadik primálfeltétel egyenlőtlenség, ezért az y_1 és az y_3 változókra nemnegativitási feltétel van.

$\max\{y_1 + y_2\}$
ha $y_1, y_3 \geq 0$
$y_1 + y_2 = 1$
$2y_1 - y_3 = -2$
$y_1 + y_2 = 0$
$y_1 + 5y_2 = 1$

Az x_i-k egyikére sincs nemnegativitás, ezért mind a négy hozzájuk tartozó duálfeltétel egyenlőséggel fog állni. A keresett DLP tehát odafenn a jobb oldalon látható.

Nem volt kérdés ugyan, de látszik, hogy a DLP-beli első és harmadik feltétel ellentmond egymásnak, ezért a DLP-nek nincs megoldása. Ennek megfelelően (szintén nem volt kérdés, de megfigyeljük), hogy az LP-ben a célfüggvényérték nem korlátos, azaz tetszőlegesen kicsi lehet, így minimum sem létezik.

---

3. (a) Mi a duálisa az alábbi lineáris programozási feladatnak?
   (b) Igaz-e, hogy a primál feladat célfüggvénye korlátos a megoldások halmazán?

   $\max\{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4\}$
   ha
   $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$
   $x_2 + 2x_4 \leq 6$
   $x_1 + x_3 + x_4 \leq 7$
   $2x_2 + 3x_4 \leq 8$

(a) Szerencsére sztenderd alakban van az LP megadva, nem kell kínlódni az ilyen alakra hozással. Lássunk neki a szamárvezetőnek!

$$
\begin{array}{r|cccc|l}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
y_1 \geq 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \leq 5 \\
y_2 \geq 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \leq 6 \\
y_3 \geq 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \leq 7 \\
y_4 \geq 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & \leq 8 \\
\hline
 & = & = & = & = & \\
 & 2 & 3 & 4 & 5 &
\end{array}
$$

Csak egyenlőtlenségek vannak, ezért minden duálváltozó nemnegatív, az x-ekre viszont nincs előjelmegkötés, ezért minden duálfeltétel egyenlőség. Jobbra látható a duális

$\max\{5y_1 + 6y_2 + 7y_3 + 8y_4\}$
ha $y_1, y_3, y_3, y_4 \geq 0$
$y_1 + y_3 = 2$
$2y_1 + y_2 + 2y_4 = -3$
$y_1 + y_3 = 4$
$2y_2 + y_3 + 3y_4 = 5$

(b) A dualitástétel szerint primál célfüggvény pontosan akkor korlátos a megoldások halmazán, ha a DLP megoldható. Márpedig az első és a harmadik duálfeltétel ellentmond egymásnak Ezért a DLP-nek nincs megoldása, vagyis az LP célfüggvényérték nem korlátos.

---

4. (a) Mi a duálisa az alábbi lineáris programozási feladatnak?
   (b) Mutassuk meg, hogy az $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ a primál feladat egy optimális megoldása, míg az $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$, $y_4 = 0$ a duál feladat egy optimális megoldása!

   $\max\{17x_1 + 17x_2 + 17x_3\}$
   ha
   $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1$
   $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3$
   $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$
   $2x_1 + 5x_2 \leq 2$

(a) Ismét szerencsések vagyunk a sztenderd alakkal, veselkedjünk neki a szamárvezetőnek!

$$
\begin{array}{r|ccc|l}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
y_1 \geq 0 & 1 & 2 & 3 & \leq 1 \\
y_2 \geq 0 & 2 & 3 & 1 & \leq 3 \\
y_3 \geq 0 & 3 & 1 & 1 & \leq 8 \\
y_4 \geq 0 & 0 & 2 & 5 & \leq 2 \\
\hline
 & = & = & = & \\
 & 17 & 17 & 17 &
\end{array}
$$

Csak egyenlőtlenségek vannak, ezért minden duálváltozó nemnegatív, az x-ekre viszont nincs előjelmegkötés, ezért minden duálfeltétel egyenlőség. Jobbra látható a duális

$\max\{y_1 + 3y_2 + 8y_3 + 2y_4\}$
ha $y_1, y_3, y_3, y_4 \geq 0$
$y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 17$
$2y_1 + 3y_2 + y_3 + 2y_4 = 17$
$3y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4 = 17$

(b) Könnyen ellenőrizhető, hogy az LP ill. a DLP egy-egy megoldásáról beszélünk, azaz mind az LP, mind a DLP-ben szereplő feltételek teljesülnek az két értékadásra. Számítsuk ki a megfelelő célfüggvényértékeket is: $17 \cdot 3 + 17 \cdot (-1) + 17 \cdot 0 = 34 = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 0$. Tudjuk, hogy ha az LP egy maximalizálás, akkor bármely LP megoldás célfüggvényértéke legfeljebb annyi mint bármely DLP megoldás célfüggvényértéke. Tehát bármely DLP célfüggvényérték legalább 34 az LP megoldás alapján, és bármely LP célfüggvényérték legfeljebb 34 a DLP megoldás miatt. Ezért a megadott

LP megoldás maximalizálja az LP célfüggvényét, és a közölt DLP megoldás pedig minimalizálja a DLP-ét. Más szóval: optimális megoldásokról van szó.

---

5. (a) Írjuk fel az alábbi (n változós) lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis ne mátrixos alakot használjunk.)
   (b) Igaz-e, hogy az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ választással a primál feladat optimális megoldását adtuk meg?

   $\max\{nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n\}$
   ha
   $x_1 \le 1$
   $x_1 + x_2 \le 2$
   $x_1 + x_2 + x_3 \le 3$
   $\vdots$
   $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le n$
   $x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$

(a) Advanced level: nem egy konkrét mátrixról van szó. Sebaj, felrajzoljuk a szamárvezetőt.

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 \ge 0 & \dots & x_n \ge 0 & \\
\hline
y_1 \ge 0 & 1 & 0 & 0 & \le 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\
y_n \ge 0 & 1 & \dots & 1 & \le n \\
\hline
 & \ge & \dots & \ge & \\
 & n & \dots & 1 &
\end{array}$$

Csak egyenlőtlenségek vannak, ezért minden duálváltozó nemnegatív. Az x-ek nemnegatívak, ezért minden duálfeltétel egyenlőtlenség. Jobbra látható a duális.

$\min\{y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n\}$
ha $y_1, y_2, \dots, y_n \ge 0$
$y_1 + y_2 \ldots + y_n \ge n$
$\vdots$
$y_1 + y_2 \ge 2$
$y_1 \ge 1$

(b) Az $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ megoldása az LP-nek, és a hozzá tartozó célfüggvényérték $n + (n-1) + \ldots + 1 = \binom{n}{2}$. Vegyük észre, hogy az $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$ pedig a DLP megoldása, és a hozzá tartozó célfv érték $1 + 2 + \ldots + n = \binom{n}{2}$. Mivel a két célfüggvényérték megegyezik, ezért az előző feladatban kifejtett gondolatmenet miatt mindkét megoldás optimális az adott problémára.

---

6. Egy $G = (V, E)$ gráf 2-*faktora* alatt az E egy olyan F részhalmazát értjük, amelyre G minden csúcsából pontosan két F-beli él indul. Tegyük fel, hogy G páros gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ adott súlyfüggvény. Fogalmazzuk meg a maximális súlyú 2-faktor keresésének problémáját IP feladatként. Igaz-e, hogy a megfelelő LP feladatnak mindig van egész optimuma, azaz az IP optimuma egyúttal optimuma az LP-nek is? Írjuk fel az LP duálisát.

Minden e élhez egy-egy $x(e)$ változó fog tartozni, és olyan IP-t szeretnénk felírni, aminek a megoldásai kizárólag a 2-faktorok karakterisztikus vektorai lesznek. (Egy 2-faktor karakterisztikus vektora egy élen annak megfelelően vesz fel 1 ill. 0 értéket, hogy az adott él hozzátartozik-e a 2-faktorhoz vagy sem.)

Világos, hogy ha sikerült ilyen lineáris feltételeket (és egészértékűségi kikötéseket) találnunk, akkor a célfüggvény $\max cx = \max \sum\{c(e)x(e) : e \in e(G)\}$ lesz. Legyen minden $x(e)$-re kikötve az egészértékűség. Ezen kívül világos, hogy $0 \le x(e) \le 1$ áll minden e élre. Végül minden v csúcsra megkívánjuk, hogy *pontosan* két él induljon belőle: $\tilde{x}(E(v)) = 2$.

Világos, hogy tetszőleges 2-faktor karakterisztikus vektora teljesít minden fenti feltételt. Fordítva, ha az $x(e)$ változók teljesítik a fenti feltételeket, akkor minden $x(e)$ értéknek 0-nak vegy 1-nek kell lennie, és minden csúcsból pontosan két olyan élnek kell kiindulnia, amelyikhez tartozó x változó értéke 1. Ez pontosan azt jelenti, hogy x egy 2-faktor karakterisztikus vektora.

A feladat második kérdéséhez azt figyeljük meg, hogy miféle mátrix írja le a fenti IP feladatot. Az $x(e) \le 1$ felső korlátokért egy egységmátrix felel, a 2 jobboldalú egyenlőtlenségekhez pedig epp a G illeszkedési mátrixa tartozik. (Ennek azért érdemes utánagondolni.) Mivel a páros gráf illeszkedési mátrixa TU, és ehhez egységvektor-sorokat adtunk hozzá, az IP probléma mátrixa TU tulajdonságú. (Ha G nem lenne páros, akkor ez nem lenne igaz, ahogy a gondolatmenet további része sem állna.) Ráadásul a jobboldalon álló konstansok is egészek, ezért a TU mátrixokról tanultak miatt az egészértékűségről szóló kikötések elhagyásával keletkező LP probléma (az ún. LP-relaxáció) azzal a tulajdonsággal rendelkezik hogy az LP optimális megoldásai között van olyan is, amelyikben minden változó egész értéket vesz fel.

Az LP duálisá felírásához megint szamárvezetőt rajzolunk.

$$\begin{array}{cc|c|c}
 & & E & \\
 & & x_1 \geq 0 \quad \dots \quad x_n \geq 0 & \\
\hline
E & y \geq 0 & I & \leq 1 \\
\hline
V & z & B(G) & = 2 \\
\hline
 & & \geq & \\
 & & c &
\end{array}$$

Az éleknek megfelelő egyenlőtlenségeknek a nemnegatív y változók, a csúcsokhoz tartozó egyenlőségeknek az előjelkötetlen z-k felelnek meg. Az x-ek nemnegatívak, ezért a duálfeltételek egyenlőtlenségek.

$\min\{\tilde{y}(E) + 2 \cdot \tilde{z}(V)\}$
ha $y \geq 0$
$y(e) + z(u) + z(v) \geq c(e)$
minden $e = uv$ élre

---

7. Adott $G = (V, E)$ gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén fogalmazzuk meg a maximális súlyú párosításfeladatot IP feladatként. Igaz-e, hogy tetszőleges G gráfra az IP optimális megoldása egyúttal a megfelelő LP relaxációnak is optimuma?

Ismét az élekhez fognak tartozni az $x(e)$ változók, és olyan lineáris feltételeket keresünk, amelyek az egészértékűségi megkötésekkel együtt pontosan a G-beli párosítások karakterisztikus vektorait írják le. Ha ez sikerül, akkor a célfüggvény $\max cx = \max \sum\{c(e)x(e) : e \in e(G)\}$ lesz. Legyen minden $x(e)$-re kikötve az egészértékűség. Ezen kívül világos, hogy $0 \leq x(e) \leq 1$ áll minden e élre. Végül minden v csúcsra megkívánjuk, hogy *legfeljebb* egy él induljon belőle: $\tilde{x}(E(v)) \leq 1$.

Világos, hogy tetszőleges párosítás karakterisztikus vektora teljesít minden fenti feltételt. Fordítva, ha az $x(e)$ változók teljesítik a fenti feltételeket, akkor minden $x(e)$ értéknek 0-nak vegy 1-nek kell lennie, és minden csúcsból legfeljebb egy olyan élnek indulhat, amelyikhez tartozó x változó értéke 1. Ez pontosan azt jelenti, hogy x egy párosítás karakterisztikus vektora.

Ha G nem páros gráf, akkor $B(G)$ nem feltétlenül lesz TU tulajdonságú, így a felírásban szereplő mátrix sem. Ezért nem várhatjuk, hogy az LP-relaxációnak (vagyis az IP feladat egészértékűségi megkötések nélküli LP változatának) automatikusan legyen egész optimuma, vagyis olyan optimális megoldása, amelyikben minden változó egész.

Egyértelmű válasz azonban a feladat második kérdésére úgy adható, hogy egy konkrét gráfot mutatunk, amelyikre nincs a fenti LP-nek egész optimuma. Ennek a gráfnak persze nem szabad párosnak lennie, vegyük a legegyszerűbben a 3 hosszú kört. Vegyük még mellé az $\mathbb{1}$ célfüggvényt, azaz minden él súlya 1. Ekkor a maximális súlyú párosítás maximális *méretűt* jelent, így az IP-re az optimum értéke 1, hisz legfeljebb 1 él van a C_3 egy párosításában. Az LP relaxáció azonban tud ennél többet is: ha mindhárom e élre $x(e) = \frac{1}{2}$, akkor így az LP egy megoldását kapjuk, amire a célfüggvényérték $\frac{3}{2}$, ami több mint az LP optimális értéke. Ennek megfelelően az LP-nek itt nincs olyan optimuma, ami minden változóhoz egész értéket rendel.

---

8. Adott $G = (V, E)$ gráf esetén írjuk fel IP feladatként a G-beli maximális méretű klikk méretének, azaz $\omega(G)$-nek a meghatározását.

Ismét karakterisztikus vektor formájában keressük a megoldást, de most a csúcsokhoz fogunk változókat rendelni: $x(v)$ akkor lesz 1, ha v benne van a megoldás klikkben. A célfüggvény tehát $\max \tilde{x}(V) = \max \mathbb{1} \cdot x$, és persze $0 \leq x(v) \leq 1$ teljesül minden v csúcsra. Ha még minden $x(v)$-re egészértekűségi megkötést is teszünk, akkor az eddigi feltételeket pontosan a V részhalmazainak a karakterisztikus vektorai teljesítik. Azt kell még lineáris feltételekkel megfogalmazni hogy ha a megoldás mondjuk az U részhalmaz karakterisztikus vektora, akkor U bármely két csúcsa szomszédos G-ben. Ezt pl. úgy tudjuk megtenni, ha azt kívánjuk meg, hogy amennyiben G két csúcsa között nem fut él, akkor a két csúcs nem lehet egyszerre U-beli: $x(u) + x(v) \leq 1$ teljesül bármely u, v nem szomszédos pontjaira G-nek.

Ezek tehát a feltételek. Világos, hogy G bármely klikkjének karakterisztikus vektora kielégíti ezeket a feltételeket, továbbá ha egy vektor ezteket kielégíti, akkor az egy olyan U részhalmaz karakterisztikus vektora, amely nem tartalmazza G két nem szomszédos csúcsát. Tehát U csakugyan klikk, sikerült megfelelő IP-t felírni.

---

9. Adott $G = (V, E)$ gráf esetén írjuk fel IP feladatként a G-beli maximális méretű független ponthalmaz méretének, azaz $\alpha(G)$-nek a meghatározását. Írjunk fel hasonló módon IP feladatot a $\nu(G), \tau(G), \rho(G)$ ill. $\chi(G)$ gráfparaméterek meghatározására.

A maximális független ponthalmaz voltaképp a komplementergráf klikkje. Ezért minden szó szerint működik az előző megoldásból azzal, hogy az utolsó feltétel megváltozik: nem azt kívánjuk, hogy bármely két nem szomszédos csúcs közül legfeljebb egy tartozhat a szóban forgó U halmazhoz, hanem azt, hogy bármely két *szomszédos* csúcsra van ez így: $x(u) + x(v) \leq 1$ teljesül G bármely uv élére.