Kombinatorikus optimalizálás 2017. tavasz

3. gyakorlat 2017. március 16.

Tudnivalók

Mohó algoritmus Input: Adott az $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ alaphalmaz, a $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény, melyre $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \ldots \geq w(e_m)$, valamint egy $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ halmazrendszer.

Működés: $F_0 := \emptyset$ és $F_{i+1} = \begin{cases} F_i & \text{ha } F_i \cup \{e_{i+1} \notin \mathcal{F} \\ F_i \cup \{e_{i+1} & \text{ha } F_i \cup \{e_{i+1} \in \mathcal{F} \end{cases}$

(Mindig a legnagyobb súlyú elemet vesszük hozzá az eddig kiválasztottakhoz a függetlenség megtartásával.) Output: $F = F_m$.

Def: $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ *matroid*, ha a fenti mohó algoritmus tetszőleges w súlyfüggvényre maximális (össz)súlyú független halmazt talál. Az $\mathcal{F}$ halmazrendszer elemei az $\mathcal{M}$ matroid *függetlenjei*, egy $Z \subseteq E$ halmaz *összefüggő*, ha $Z \notin \mathcal{F}$.

Függetlenségi axiómák:
(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$, (2) $X \subseteq Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \in \mathcal{F}$, (3) $X, Y \in \mathcal{F}, |X| < |Y| \Rightarrow \exists e \in Y \setminus X : X \cup \{e\} \in \mathcal{F}$

Állítás: $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ matroid $\iff$ $\mathcal{F}$-re teljesülnek a függetlenségi axiómák.

Gyakorlatok

1. Igazoljuk, hogy ha $G = (V, E)$ páros gráf, akkor a $B(G)$-vel jelölt incidenciamátrixa TU. (A $B(G)$ sorai V, oszlopai pedig E elemeinek felelnek meg, és a v-hez tartozó sor és e-hez tartozó oszlop metszetében 1 vagy 0 áll aszerint, hogy v végpontja az e-nek vagy nem.)
2. Egy $G = (V, E)$ gráf 2-*faktora* alatt az E egy olyan F részhalmazát értjük, amelyre G minden csúcsából pontosan két F-beli él indul. Tegyük fel, hogy G páros gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ adott súlyfüggvény. Fogalmazzuk meg a maximális súlyú 2-faktor keresésének problémáját ILP feladatként. Igaz-e, hogy a megfelelő LP feladatnak mindig van egész optimuma, azaz az ILP optimuma egyúttal optimuma az LP-nek is? Írjuk fel az LP duálisát.
3. Adott $G = (V, E)$ gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén fogalmazzuk meg a maximális súlyú párosításfeladatot ILP feladatként. Igaz-e, hogy tetszőleges G gráfra az ILP optimális megoldása egyúttal a megfelelő LP relaxációnak is optimuma?
4. Mutassuk meg, hogy ha A egy TU mátrix és A-t kiegészítjük egy olyan sorral/oszloppal, amelyben nullákon kívül pontosan egy egyes áll, akkor a kapott mátrix továbbra is TU mátrix lesz. Igaz-e, hogy ha egy TU mátrix egy sorát/oszlopát végigszorozzuk -1-gyel, akkor az így nyert mátrix is TU lesz?
5. Igazoljuk, hogy ha $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, és $\mathcal{F}$ tagjai az E kört nem tartalmazó részhalmazai, akkor $\mathcal{M}_G = (E, \mathcal{F})$ matroid. (Konkrétan a G körmatroidja.)
6. Igazoljuk, hogy tetszőleges $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ alaphalmazon a lineáris függetlenség matroidot definiál.
7. Legyen $S = \{1, 2, 3\}$. Az alábbi halmazrendszerek közül melyik alkot matroidot az S alaphalmazon? (1) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$, (2) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$, (3) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$, (4) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$
8. Legyen $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ egy matroid, $k \in \mathbb{N}$ pedig tetszőleges. Igaz-e, hogy $(E, \mathcal{F}_k)$ is matroid, ahol $\mathcal{F}_k := \{F \in \mathcal{F} : |F| \leq k\}$?
9. Tegyük fel, hogy az A mátrix oszlopai definiálják az $\mathcal{M}$ lineáris matroidot, azaz $\mathcal{M}$ elemei az A oszlopai, és oszlopok egy halmaza akkor független, ha az adott oszlopvektorok lineárisan függetlenek. Mutassuk meg, hogy ha A' az A mátrixból elemi sorekvivalens átalakítások sorozatával kapható, akkor az A' mátrixhoz tartozó lineáris matroid szintén $\mathcal{M}$ lesz.
10. Grafikus-e az $\mathcal{U}_{4,2}$ matroid? Ha igen, adjuk meg egy reprezentációját.
11. Grafikus-e a jobb oldali mátrixhoz tartozó lineáris matroid? Ha igen, adjuk meg egy reprezentációját.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. A jobb oldali mátrix oszlopai által definiált lineáris matroid oszlopaihoz tartozó súlyok (balról jobbra) $3, 5, 1, 2, 5$ és 7. Határozzuk meg egy olyan lineárisan független részhalmazát az oszlopoknak, melyek összsúlya maximális.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$