Kombinatorikus optimalizálás 2020. tavasz

3. gyakorlat 2020. március 27.

Tudnivalók

Def: *Egészprogramozási feladatnak* egy olyan LP vagy DLP feladatot hívunk, ahol további megkötés, hogy a változóknak egész értéket kell felvenniük. Ha LP és DLP duális feladatpár, akkor az x és y-beli változózók egészértékűségét megkívánva kapjuk az IP és DIP egészprogramozási feladatokat.

Megfigyelés: Ha LP egy $\max cx$, DLP pedig egy $\min yb$ típusú feladat és mindkettőnek van megoldása, akkor a megfelelő egészprogramozási feladatokra teljesül, hogy

$$\max_{IP} cx \leq \max_{LP} cx = \min_{DLP} yb \leq \min_{DIP} yb$$

Cél egy olyan feltétel, ami biztosítja, hogy az iménti egyenlőtlenségláncban végig egyenlőség álljon.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix *teljesen unimoduláris (TU)*, ha A bármely négyzetes részmátrixának determinánsa 0 vagy ± 1. **Megfigyelés:** TU mátrix minden eleme 0 vagy ± 1.

Állítás: Ha A TU mátrix, akkor TU marad, ha (1) transzponáljuk, (2) valamely sorát/oszlopát (-1)-gyel végigszorozzuk, (3) valamely sorát vagy oszlopát megismételjük vagy töröljük, (4) két sorát (vagy oszlopát) felcseréljük, (5) A-t egy 1 db 1-esen kívül csupa 0-kat tartalmazó sorral vagy oszloppal bővítjük.

Tétel: Ha A TU mátrix és a b vektor koordinátái egészek, és az LP az A együtthatómátrixszal és a b-beli jobboldalakkal van megadva, akkor $\max_{IP} cx = \max_{LP} cx$ teljesül. Ha pedig A TU és c egész, akkor a DLP-re teljesül, hogy $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$. Szavakban: TU együtthatómátrix és egész konstansok esetén ha az LP-nek (ill. a DLP-nek) van optimuma, akkor az optimumérték egész változókkal megadható megoldáson is felvétetik, vagyis az egészértékűségi megszorítás nem ront az optimum értékén.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf $B(G)$*illeszkedési mátrixának* (avagy incidenciamátrixának) sorai V-nek, oszlopai E-nek felelnek meg, és a v csúcs és e él által meghatározott (v, e) pozícióban 1 áll, ha e a v-ből kilép, -1, ha belép, és 0, ha v nem végpontja e-nek. Irányítatlan gráf illeszkedési mátrixa hasonló: ha v végpontja e-nek, akkor 1 áll, ha nem akkor 0.

Állítás: Ha G irányított gráf, akkor a $B(G)$ incidenciamátrixa TU tulajdonságú.

Biz: Legyen B a $B(G)$ egy $k\times k$ méretű négyzetes részmátrixa. Azt kell igazolni, hogy $det(B) \in \{0, \pm 1\}$. Indukciót alkalmazunk k szerint. Ha $k = 1$, akkor a determináns a megfelelő elem, ami 0 vagy ± 1. Ha már $k - 1$-ig tudjuk, akkor ha B minden oszlopában két nemnulla áll, akkor B sorösszege $\underline{0}$, így $det(B) = 0$. Ha van olyan oszlop B-ben, ahol legfeljebb egy nemnulla áll, akkor pedig e szerinti kifejtéssel az állítás az indukciós feltevésből adódik.

Köv.: Ha G páros gráf, akkor a $B(G)$ incidenciamátrix TU.

Biz: Irányítsuk G éleit az egyik színosztályba, és a kapott $\vec{G}$ irányított gráf (TU tulajdonságú) incidenciamátrixában szorozzuk meg (-1)-gyel a másik színosztályhoz tartozó sorokat. Így egyrészt a $B(G)$-t kapjuk, másrészt pedig a TU tulajdonság is fennmaradt.

Alkalmazás: Maximális súlyú teljes párosítás keresése egy G páros gráfban megfelel a $\max\{cx : x \geq 0,\ Bx = 1\ x \text{ egész}\}$ IP feladatnak, ahol $B = B(G)$ a G illeszkedési mátrixa. Részletesen kiírva ezt azt kapjuk, hogy $\max\{cx : x(e) \geq 0 \forall e, \tilde{x}(E(v)) = 1 \forall v,\ x \text{ egész}\}$ feladatnak. Ennek duálisa $\min\{y \cdot \mathbb{1} : yB \geq c\}$, ami részletesen kiírva $\min\{y \cdot \mathbb{1} : y(u) + y(v) \geq c(e) \forall e = uv\}$. Mit takarnak ezek a formulák? Lássuk.

Thf a páros gráf kétcsúcshalmazát n vevő ill. n termék alkotja, és egy „megoldásban" minden vevőnek pontosan egy terméket kell kapnia. A c súlyfüggvény $c(vt)$ értéke azt adja meg, hogy a t termék mennyi (pénzben kifejezett) hasznosságot hordoz a v vevő számára. Ekkor a maximális súlyú párosítás annak a megoldásnak felel meg, ami a társadalomban fellépő összhasznosságot maximalizálja. Az y súlyozott lefogásban az egyes termékekhez ill. vevőkhöz tartozó számokat érdemes áraknak ill. profitoknak tekinteni: ha a v vevő megvásárolja a t terméket, akkor a profitja $c(vt) - y(t)$ lesz. A vt él akkor pontos, ha a v vevő az adott árszínvonal mellett akkor jár a legjobban, ha a t terméket vásárolja meg. Az optimális megoldás olyan árszínvonalnak felel meg, amelyik esetén minden vevő tud úgy választani számára maximális profitot biztosító terméket, hogy ezáltal minden termék pontosan egy vevőhöz kerüljön. Ezt hívjuk piaci egyensúlynak. Az Egerváry algoritmusnak az a lépése, ami a súlyozott lefogást változtatja, felfogható egy olyan termékcsoport árcsökkentésének, amire kicsi a kereslet.

A Ford-Fulkerson-tétel bizonyítása a dualitástételből: Adott a $(G, s, t.c)$ hálózat, és G minden e éléhez egy $x(e)$ változó. Ekkor az alábbi LP írja le a maximális folyamproblémát.

$$\max \sum \tilde{x}(E_{ki}(s)) - \sum \tilde{x}(E_{be}s))\ \text{, ahol } x(e) \geq 0, x(e) \leq c(e) \forall e \in E \text{ és } \tilde{x}(E_{ki}(v)) - \sum \tilde{x}(E_{be}v)) = 0\ \forall\, v \neq s, t\,.$$

Ennek duálisában minden $v \neq s, t$ csúcshoz tartozik egy duális $\pi(v)$ változó (potenciál) és minden e élhez egy-egy nemnegatív $y(e)$ változó. Bevezetve a $\pi(s) = -1$ és $\pi(t) = 0$ értékeket, felírjuk a DLP-t is. Itt a célfüggvény $\min \sum_{e\in E} y(e)c(e)$, és minden $e = uv$ élhez tartozik egy-egy feltétel: $y(e) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0$. Ez a feltétel azt jelenti, hogy minden élen az y változó legalább akkora, mint az él két végpontja között π szerint értelmezett potenciálugrás.

Vizsgáljuk az meg ehhez az LP (ill. DLP) feladathoz tartozó mátrixot. Ez úgy kapható, hogy a $B(G)$ illeszkedési mátrixból elhagyjuk az s, t-nek megfelelő sorokat, és egy egységmátrixot adunk a tetejére. Ez így TU-mátrix lesz, és mivel a DLP-ben a jobboldalak egészek, ezért van egész optimum, aholis minden $y(e)$ ill. minden $\pi(v)$ érték egész. Ha most minden pozitív potenciált 0-ra változtatunk, és minden negatívot -1-re, továbbá minden 1-nél nagyobb y-értéket 1-re állítunk át, akkor az így megváltoztatott π és y továbbra is megoldás marad, a célfüggvényérték pedig nem növekszik. Azonban ekkor az optimum pontosan egy minimális st-vágás kapacitását írja le, és ez igazolja a tételt.

Gyakorlatok

1. Tegyük fel, hogy az x és y változókkal megadott kétváltozós lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldásai az xy-síkon egy P konvex sokszöget alkotnak. Határozuk meg, hogy melyek azok a megoldások, amelyek alkalmasan választott c_1, c_2 értékekkel maximalizálják a $c_1x + c_2y$ célfüggvényértéket. Ha ismerjük a P sokszög csúcsainak koordinátáit, akkor adott a c_1 és c_2, akkor hogyan lehet gyorsan megtalálni egy optimális megoldást?
2. Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát!

$$\begin{aligned}&\min\{x_1 - 2x_2 + x_4\}\\ &\text{ha}\\ &x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1\\ &x_1 + x_3 + 5x_4 = 1\\ &x_2 \leq 0\end{aligned}$$

3. (a) Mi a duálisa az alábbi lineáris programozási feladatnak?

   (b) Igaz-e, hogy a primál feladat célfüggvénye korlátos a megoldások halmazán?

$$\begin{aligned}&\max\{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4\}\\ &\text{ha}\\ &x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5\\ &x_2 + 2x_4 \leq 6\\ &x_1 + x_3 + x_4 \leq 7\\ &2x_2 + 3x_4 \leq 8\end{aligned}$$

4. (a) Mi a duálisa az alábbi lineáris programozási feladatnak?

   (b) Mutassuk meg, hogy az $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ a primál feladat egy optimális megoldása, míg az $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$, $y_4 = 0$ a duál feladat egy optimális megoldása!

$$\begin{aligned}&\max\{17x_1 + 17x_2 + 17x_3\}\\ &\text{ha}\\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1\\ &2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3\\ &3x_1 + x_2 + x_3 \leq 8\\ &2x_1 + 5x_2 \leq 2\end{aligned}$$

5. (a) Írjuk fel az alábbi (n változós) lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis ne mátrixos alakot használjunk.)

   (b) Igaz-e, hogy az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ választással a primál feladat optimális megoldását adtuk meg?

$$\begin{aligned}&\max\{nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n\}\\ &\text{ha}\\ &x_1 \leq 1\\ &x_1 + x_2 \leq 2\\ &x_1 + x_2 + x_3 \leq 3\\ &\vdots\\ &x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n\\ &x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0\end{aligned}$$

6. Egy $G = (V, E)$ gráf 2-*faktora* alatt az E egy olyan F részhalmazát értjük, amelyre G minden csúcsából pontosan két F-beli él indul. Tegyük fel, hogy G páros gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ adott súlyfüggvény. Fogalmazzuk meg a maximális súlyú 2-faktor keresésének problémáját ILP feladatként. Igaz-e, hogy a megfelelő LP feladatnak mindig van egész optimuma, azaz az ILP optimuma egyúttal optimuma az LP-nek is? Írjuk fel az LP duálisát.
7. Adott $G = (V, E)$ gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén fogalmazzuk meg a maximális súlyú párosításfeladatot ILP feladatként. Igaz-e, hogy tetszőleges G gráfra az ILP optimális megoldása egyúttal a megfelelő LP relaxációnak is optimuma?
8. Adott $G = (V, E)$ gráf esetén írjuk fel ILP feladatként a G-beli maximális méretű klikk méretének, azaz $\omega(G)$-nek a meghatározását.
9. Adott $G = (V, E)$ gráf esetén írjuk fel ILP feladatként a G-beli maximális méretű független ponthalmaz méretének, azaz $\alpha(G)$-nek a meghatározását. Írjunk fel hasonló módon ILP feladatot a $\nu(G), \tau(G), \rho(G)$ ill. $\chi(G)$ gráfparaméterek meghatározására.
10. Adott $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ csúcsok és $l : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény esetén írjuk fel ILP (vagy LP) feladatként a legrövidebb st-út meghatározását.