Kombinatorikus optimalizálás 2020. tavasz

2. gyakorlat 2020. március 6.

Tudnivalók

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek

Megfigyelés: Tetszőleges lineáris egyenlőtlenségrendszer $A\underline{x} \leq \underline{b}$ kanonikus alakba írható: $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a változók, $\underline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ a jobboldalon álló konstansok, A pedig az együtthatómátrix. (Az egyenlőségeket két egyenlőtlenségként írjuk fel, a fordított ($\geq$) egyenlőtlenségek helyett pedig a (-1)-szeresük szerepel $\leq$ relációval.)

Fourier-Motzkin-elimináció

A Gauss-eliminációhoz hasonló elemi sorekvivalens átalakításokat végzünk (sorcsere, sor λ-val végigszorzása, egy sornak a másikhoz hozzáadása), de itt csak $\lambda > 0$ lehet, ezért egy-egy változó elminációja bonyolultabb, mint a Gauss-elimináció esetén, aholis egy értékadó egyenlőtlenséget kapunk és a további változókra egy lineáris egyenletrendszert. Itt is egymás után elmináljuk az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változókat, azaz olyan egyenlőtlenségrendszerre térünk át, amelyikben az éppen eliminált változó már nem szerepel. Az x_i eliminációját az alábbiak szerint végezzük.

Az kibővített együtthatómátrix sorait alkalmas pozitív konstansokkal szorozva elérjük, hogy az x_i oszlopában minden elem ± 1 vagy 0 legyen. Sorcserékkel a mátrixot $A = \left(\begin{array}{c|c} A_+ & b_+ \\ A_- & b_- \\ A_0 & b_0 \end{array}\right)$ alakba írjuk ahol az x_i oszlopában A_+, A_- ill. A_0 tartalmazza rendre az 1, -1, ill. 0 elemeket. Az elimináció után az $A' = \left(\begin{array}{c|c} A^* & b^* \\ A_0 & b_0 \end{array}\right)$ mátrixot kapjuk, ahol A^*-ba gyűjtjük az összes lehetséges A_+ ill. A_--beli sorpár összegét. Az elimináció utáni mátrixban tehát x_i oszopában csak 0 együtthatók állnak.

I. eset Az összes változó eliminálása után tilos sor keletkezik, azaz olyan csupa 0 sora A-nak, amelyhez a b konstans negatív. Ekkor nincs megoldása a lineáris egyenlőtlenségrendszernek.

II. eset Nem keletkezik tilos sor. Ekkor $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ sorrendben értéket adunk az egyes változóknak. Az x_i-nek történő értékadáskor csak az x_i eliminációjakor elhagyott soroknak megfelelő egyenlőtlenségekre kell figyelni: ezek adnak az x_i-re egymásnak nem ellentmondó alsó és felső korlátokat. Ilyenkor tehát van megoldás, és konstráltunk is egyet.

Megfigyelés: A Fourier-Motzkin-elimináció során kapott minden egyes egyenlőtlenség az eredeti $A\underline{x} \leq \underline{b}$ rendszer egyenlőtlenségeinek alkalmas nemnegatív többszöröseinek összege.

Köv.: Farkas-lemma Az $A\underline{x} \leq \underline{b}$ lineáris egyenlőtlenségrendszerre az alábbiak közül pontosan egy teljesül (1) $\exists \underline{x} : A\underline{x} \leq \underline{b}$ ill. (2) $\exists \underline{y} \geq 0 : \underline{y}A = \underline{0}$, $\underline{y}\underline{b} < 0$.

A Farkas-lemma néhány alakja: (1) $\exists x : \ Ax \leq b \iff \nexists y \geq 0 : yA = 0, yb < 0$
(2) $\exists x : \ Ax \geq b \iff \nexists y \geq 0 : yA = 0, yb > 0$ (3) $\exists x \geq 0 : \ Ax \leq b \iff \nexists y \geq 0 : yA \geq 0, yb < 0$
(4) $\exists x \geq 0 : \ Ax = b \iff \nexists y : yA \geq 0, yb < 0$

Def: *Lineáris program* alatt egy lineáris célfüggvény maximalizálását vagy minimalizálását értjük lineáris feltételek (egyenlőségek vagy nem szigorú egyenlőtlenségek) és a változókra vonatkozó esetleges további nemnegativitási feltételek fennállása mellett. Néhány sztenderd alakja: (1) $\max\{cx : \ Ax \leq b\}$, (2) $\max\{cx : \ x \geq 0 \ Ax \leq b\}$ (3) $\max\{cx : \ x \geq 0, \ Ax = b\}$
(4) $\min\{cx : \ Ax \geq b\}$ (5) $\min\{yb : \ yA \geq c\}$ (6) $\min\{yb : \ y \geq 0 \ yA = c\}$

Def: Az LP-vel jelölt $\max\{cx : \ Ax \leq b\}$ primál feladat *duálisa* a DLP-vel jelölt $\min\{yb : \ y \geq 0 \ yA = c\}$ lineáris programozási feladat. Ettől különböző alakban megadott LP feladatnak is képezhető a duálisa az alábbi ökölszabályok figyelembevételével.

(0) Az LP és DLP feladatok egyikében minimalizáljuk, a másikban maximalizáljuk az ottani célfüggvényt.
(1) LP-ben és DLP-ben egyaránt igaz, hogy maximalizálandó célfüggvényhez $=$ és $\leq$ típusú, minimalizálandóhoz pedig $=$ és $\geq$ típusú egyenlőtlenségek tartoznak.
(2) A duális változók a primál feltételekhez, az primál változók a duál feltételekhez tartoznak.
(3) Nemnegatív változóhoz egyenlőtlenség, előjelkötetlen változóhoz egyenlőség tartozik mindkét fajta megfeleltetésben.
(4) A primál feladatbeli feltételek jobboldalán szereplő konstansok a duál célfüggvényértékek, a primál célfüggvényértékek pedig a duális feltételek konstansai.

Dualitástétel Tetszőleges $\max cx$ típusú LP feladatra és $\min yb$ típusú DLP duálisára az alábbi lehetőségek közül pontosan egy teljesül.
(1) Az LP nem megoldható, a DLP megoldásain pedig az yb célfüggvényérték alulról nem korlátos.
(2) A DLP nem megoldható az LP megoldásain pedig a cx célfüggvényérték felülről nem korlátos.
(3) Az LP és a DLP is megoldható, és az optimumértékek azonosak:

$$\max\{cx : x \text{ az LP megoldása}\} = \min\{yb : y \text{ a DLP megoldása}\}.$$

Gyakorlatok

1. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások! u és v oszlopvektorokat jelölnek, a sorvektort a 0 pedig a nullvektort (is). Mindegyik vektor dimenziója azonos.
   (a) Ha $u \leq v$ és $u \neq v$ akkor $u < v$.
   (b) Ha $u \leq v$ és $u \geq v$ akkor $u = v$.
   (c) Ha $u \geq 0$ és $a \cdot u > 0$ akkor $a \geq 0$.
   (d) Ha $u \leq v$ és $a \geq 0$ akkor $a \cdot u \leq a \cdot v$.

2. Oldjuk meg Fourier-Motzkin elimináció segítségével az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket, ill. határozzuk meg mindazon p értékeket, amelyre megoldható a rendszer.

$$\begin{array}{cccc}
2x+y+z\le 5 & 2x+y+z\le 5 & 2x+y+z\le 5 & 2x_1+x_2+x_3+x_4\le 10\\
x+2y-z\le 4 & x+2y-z\le 4 & x+2y-z\le 4 & x_1+3x_2+x_3+x_4\le 12\\
z\le 1 & z\le 1 & z\le 1 & x_1+x_2+4x_3+x_4\le 14\\
x-2y-2z\ge -5 & x-2y-2z\ge -5 & x-2y-2z\ge -5 & x_1+x_2+x_3+5x_4\le 16\\
x+y+z\ge 3 & x+y+z\ge 4 & x+y+z\ge 5 & x_1+x_2+x_3+x_4\ge p
\end{array}$$

3. Írjuk fel az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszert $Ax \le b$ alakban, majd döntsük el a Farkas-lemma segítségével mutassuk meg, hogy megoldhatóak-e. (Azaz, ha nem megoldható, akkor adjunk meg egy y vektort és mutassuk meg róla, hogy ez a Farkas-lemma értelmében bizonyítja az $Ax \le b$ rendszer megoldhatatlanságát.)

$$\begin{array}{c}
7x_1+5x_2+3x_3\le 2\\
2x_1+5x_2-6x_4\ge -3\\
3x_1+x_3\ge 4\\
2x_1-3x_4\le 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
8x_1+5x_2+3x_3\le 2\\
2x_1+5x_2-6x_4\ge -3\\
3x_1+x_3\ge 4\\
2x_1-3x_4\le 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
x_1-5x_2-3x_3+2x_4\ge -2\\
x_1+2x_3-8x_4=5\\
x_1-2x_2-4x_4\le 2
\end{array}$$

4. Kisvakond azon gondolkozik, hogy barátaival nadrágüzletet nyit az erdőben. Terveik szerint vakondok és nyulak részére fognak nadrágot árulni. A vakondok részére készülő nadrágot 6 perc alatt lehet kiszabni, 8 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A nyulak részére készülőt pedig 12 perc alatt lehet kiszabni, 4 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A rák, aki az anyagot szabja, hetente 1800 percet tud dolgozni, a nádirigó, aki a nadrágokat varrja össze, heti 1400 percet, míg a felesége, aki a gombfelvarrást vállalja, csak 200 percet hetente. Terveik szerint a vakondoknak való nadrágot 10 erdei petákért a nyulaknak valót 12 petákért adják. Melyik nadrágból hány darabot készítsenek, ha a bevételüket akarják maximalizálni?

5. Kisvakondék azon töprengenek, hogy megváltoztatják a nyulak részére készülő nadrág árát.
   (a) Mennyi a nyulak részére készülő nadrág minimális- illetve maximális ára, amely mellett az 4. feladatnál kapott értékek mellett maximális bevételt kapunk?
   (b) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 175 vakondnadrágot és 0 nyúlnadrágot gyártanak?
   (c) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak valót?
   (d) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 130 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 70 nyulaknak valót?
   (e) Lehetséges-e úgy megváltoztatni mindkét típusú nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak valót?

6. Tegyük fel, hogy az x és y változókkal megadott kétváltozós lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldásai az xy-síkon egy P konvex sokszöget alkotnak. Határozuk meg, hogy melyek azok a megoldások, amelyek alkalmasan választott c_1, c_2 értékekkel maximalizálják a $c_1x + c_2y$ célfüggvényértéket. Ha ismerjük a P sokszög csúcsainak koordinátáit, akkor adott a c_1 és c_2, akkor hogyan lehet gyorsan megtalálni egy optimális megoldást?

7. (a) Mi a duálisa az alábbi lineáris programozási feladatnak?
   (b) Igaz-e, hogy a primál feladat célfüggvénye korlátos a megoldások halmazán?

   max$\{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4\}$
   ha
   $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5$
   $x_2 + 2x_4 \le 6$
   $x_1 + x_3 + x_4 \le 7$
   $2x_2 + 3x_4 \le 8$

8. (a) Mi a duálisa az alábbi lineáris programozási feladatnak?
   (b) Mutassuk meg, hogy az $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ a primál feladat egy optimális megoldása, míg az $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$, $y_4 = 0$ a duál feladat egy optimális megoldása!

   max$\{17x_1 + 17x_2 + 17x_3\}$
   ha
   $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1$
   $2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3$
   $3x_1 + x_2 + x_3 \le 8$
   $2x_1 + 5x_2 \le 2$

9. (a) Írjuk fel az alábbi (n változós) lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis ne mátrixos alakot használjunk.)
   (b) Igaz-e, hogy az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ választással a primál feladat optimális megoldását adtuk meg?

   max$\{nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n\}$
   ha
   $x_1 \le 1$
   $x_1 + x_2 \le 2$
   $x_1 + x_2 + x_3 \le 3$
   $\vdots$
   $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le n$
   $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$