

Tudnivalók

Gráflek leemelése

Def: Legyenek $e = uz$, $f = vz$ a G gráf két éle. Az e, f leemelésével keletkezik a $G^{ef} = G - e - f + uv$ gráf.

Def: $X \subseteq V$ esetén $d(X) := |E(X)|$ az X és $V \setminus X$ között futó élek száma, $X, Y \subseteq V$ esetén pedig $d(X, Y) := |E(X, Y)|$ az $X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ között futó élek száma.

Állítás: Tetszőleges irányítatlan $G = (V, E)$ gráf és $X, Y \subseteq V$ esetén

(1) $d(X) + d(Y) = d(X \cap Y) + d(X \cup Y) + 2d(X \setminus Y, Y \setminus X)$ ill.

(2) $d(X) + d(Y) = d(X \setminus Y) + d(Y \setminus X) + 2d(X \cap Y, V \setminus (X \cup Y))$ teljesül.

Tétel: (Lovász) Tfh $d(z)$ páros és $\lambda_G(x, y) \geq k \geq 2$ teljesül minden $x, y \in V$ csúcsra a $G = (V + z, E)$ gráfban. Ekkor minden $e = zt$ élhez létezik olyan $f = vz$ él, melyre $\lambda_{G^{ef}}(x, y) \geq k$ minden $x, y \in V$ csúcsra.

Lemma: Ha a G gráf k -élösszefüggő, ám $G - e$ már nem k -élösszefüggő a G tetszőleges e élére, akkor G -nek van k -adfokú csúcsa.

Tétel: A $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor $2k$ -élösszefüggő, ha előállítható egy pontból kiindulva az alábbi lépések tetszőleges sorozatával. (1) Az eddig elkészített gráfhoz élt adunk hozzá. (2) Az eddig elkészített gráf k élét összecsípjük, azaz a k él mindegyikét felosztjuk egy-egy új csúccsok és ezeket az osztópontokat egybeolvasztjuk.

Tétel: (Nash-Williams) A G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van k -élösszefüggő irányítása, ha G (irányítatlan értelemben) $2k$ -élösszefüggő.

Gyakorlatok

- Azt mondjuk, hogy az $\emptyset \neq X \subsetneq V(G)$ halmaz a G gráf egy minimális vágását határozza meg, ha az X -ből kilépő élek száma a minimális a $V(G)$ valódi részhalmazai körében, azaz bármely $\emptyset \neq Y \subsetneq V(G)$ esetén Y és $V(G) \setminus Y$ között legalább annyi él fut, mint X és $V(G) \setminus X$ között. Bizonyítsuk be, hogy ha X és Y a $V(G)$ keresztező részhalmazai (azaz $X \cap Y, X \setminus Y, Y \setminus X$ és $V(G) \setminus (X \cup Y)$ egyike sem üreshalmaz), akkor $X \cap Y, X \cup Y$ és $X \setminus Y$ is a G gráf egy minimális vágását határozza meg.
- Tegyük fel, hogy G olyan 4-élösszefüggő gráf, aminek v egy 8-fokú csúcsa. Igazoljuk, hogy a $G - v$ gráfhoz hozzáadható egy-egy negyedfokú v_1 és egy v_2 csúcs úgy, hogy a kapott gráf 4-élösszefüggő legyen, és a G gráf v -től különböző csúcsainak fokszáma ne változzon. (Tkp a v csúcsot kell szétszedni két negyedfokú csúcsra a 4-szeres élösszefüggőség megőrzésével.)
- Tegyük fel, hogy a 4-szeresen élösszefüggő G gráfnak u és v szomszédos, hatodfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy G -nek van olyan ux és vy éle, amelyre az említett élek és uv törlésével, valamint egy xy él behúzásával létrejövő $G - uv - ux - vy + xy$ gráf szintén 4-szeresen élösszefüggő.
- Tegyük fel, hogy a 4-szeresen élösszefüggő G gráfnak u és v nem szomszédos, negyedfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy u -nak vannak olyan a és b szomszédai, valamint v -nek olyan c és d szomszédai, hogy a $G' = G - ua - ub - vc - vd + uc + ud + va + vb$ gráf 4-szeresen összefüggő. (4 élt törölünk és 4 élt hozzáveszünk G -hez.)
- Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $k \geq 1$ egész szám esetén minden $2k$ -reguláris és $2k$ -szorosan élösszefüggő gráf megkapható egy k hurokért tartalmazó egycsúcsú gráfból $él-k$ -asok egymás utáni összecsípsésével.
- Bizonyítsuk be, hogy ha a 100-csúcsú G gráf minden egyes élét úgy lehet a piros, fehér vagy zöld színek valamelyikére kiszínezni, hogy a piros élek egy 100-csúcsú kört, a fehér élek egy 100-csúcsú fát a zöld élek pedig egy 100-csúcsú összefüggő gráfot alkotnak, akkor G megkapható egy csúcsból kiindulva élhozzáadások és élpárösszecsípsések alkalmas egymásutánjával.