Kombinatorikus optimalizálás 2020. tavasz

1. gyakorlat 2020. február 21.

Tudnivalók

Def: A *hálózat* egy (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ egy irányított gráf, $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvény és $s, t \in V$ a G különböző csúcsai, ún. *termináljai* (s a *termelő*, t a *fogyasztó*). A fenti hálózaton $f : E \to \mathbb{R}_+$ egy *folyam*, ha $0 \le f(e) \le c(e)$ minden $e \in E$ élre (ez a *kapacitásfeltétel*), és $\sum_{uv\in E} f(uv) = \sum_{vu\in E} f(vu)$ tetszőleges $v \in V \setminus \{s, t\}$ csúcsra (ez a *folyammegmaradási* avagy *Kirchhoff-feltétel*). Az f folyam *nagysága* (elavult szóhasználattal az f folyam *értéke*) az s-ből kifolyó nettó folyammennyiség: $\sum_{su\in E} f(su) - \sum_{us\in E} f(us)$.

Def: A fenti hálózatban ha $X \subset V$ olyan halmaz, hogy $s \in X \not\ni t$, akkor a hálózat X által indukált *(st-)vágása* az X és $V \setminus X$ között futó élek halmaza, melybe beletartoznak a $V \setminus X$-ből X-be futó élek is. Az X által indukált st-vágás kapacitása $c(X) := \sum_{u\in X, v\in V\setminus X} c(uv)$, azaz az X-ből $V \setminus X$-be futó élek összkapacitása .

Lemma: Ha (G, s, t, c) egy hálózat, f egy folyam és $s \in X \subseteq V \setminus \{t\}$ egy st-vágást indukál, akkor $m_f = \sum_{v\in X, u\in V\setminus X} f(vu) - f(uv)$, azaz a folyamnagyság megegyezik a vágáson átfolyó nettó folyammennyiséggel. **Köv.:** Ha f megengedett folyam és X st-vágást indukál, akkor $m_f \le c(X)$.

Állítás: A (G, s, t, c) egy hálózat f folyama pontosan akkor maximális (azaz az m_f folyamnagyság akkor legnagyobb), ha $m_f = c(X)$ egy X által indukált st-vágásra.

Ford-Fulkerson tétel: Tetszőleges hálózatban $\max m_f = \min c(X)$.

Javító utas algoritmus Kiindulunk a $f \equiv 0$ folyamból, és addig növelünk az aktuális f-hez tartozó segédgráf javító útja mentén, amíg ez lehetséges. Ha nincs további javítás, akkor a folyam maximális. A segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza ekkor minimális st-vágást indukál.

Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a c kapacitásfüggvény minden élen egész, akkor létezik olyan maximális nagyságú f folyam, ami minden élen egész értéket vesz fel.

Páros gráf: Olyan G gráf, amelynek csúcsai két színnel színezhetők úgy, hogy minden élnek különbözők színűek legyenek a végpontjai.

Párosítás: Közös ponttal nem rendelkező (más szóval független) élek halmaza.

Alternáló utas algoritmus Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, amit addig növelünk M által fedetlen pontból M által fedetlen pontba vezető M-alternáló utakon történő cserékkel, amíg tudunk. (Az M-beli éleket „felfele", az M-en kívülieket „lefele" irányítva fedetlen pontok között keresünk irányított utat, amin a csere az irányítás megfordítását jelenti.) Ha nincs ilyen út, akkor a „felső" fedetlen pontokból elérhető M-beli élek „alsó" végpontjai a többi M-beli él „felső" végpontjával együtt egy $|M|$ méretű lefogó ponthalmazt alkot, ezért az M párosítás maximális.

Megfigyelés: (1) Az alternáló utas algoritmus a javító utas algoritmus speciális esete.
(2) Maximális számú, bástyaelhelyezésben álló 1-es keresése 0/1-mátrixokban ekvivalens páros gráfban maximális párosítás keresésével.

Konvenció: Tetsz. $f : H \to \mathbb{R}$ függvény és $A \subseteq H$ esetén $\tilde{f}(A) = \sum\{f(a) : a \in A\}$.

Def: Adott $G = (A \cup B, E)$ páros gráf és $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén az M párosítás *maximális súlyú*, ha $\tilde{w}(M) \ge \tilde{w}(M')$ teljesül a G tetszőleges M' párosítására.

Megfigyelés: (1) A maximális súlyú párosítás keresésének speciális esete a maximális méretű párosítás keresése, mégpedig $w \equiv 1$ esetén.
(2) A maximális súlyú párosítás keresésének feladata visszavezethető maximális súlyú **teljes** párosítás keresésére: elhagyjuk a negatív súlyú éleket, az A színosztályt kiegészítjük $|B|$ db, a B színosztályt pedig $|A|$ db új csúccsal, és az új csúcsokból a másik színosztály minden csúcsába 0 súlyú élt veszünk fel. A továbbiakban tehát maximális súlyú teljes párosítás keresése lesz a feladat.

Def: Adott $G = (V, E)$ gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény esetén $c : V \to \mathbb{R}$ *súlyozott lefogás*, ha tetszőleges $e = uv \in E$ élre $w(e) \le c(u) + c(v)$ teljesül. Az e él akkor *pontos*, ha egyenlőség teljesül.

Megfigyelés: Ha c súlyozott lefogás a w súlyfüggvényhez, akkor tetszőleges M teljes párosításra $\tilde{w}(M) \le \tilde{c}(V)$ teljesül.

Köv.: (1) Ha $\tilde{w}(M) = \tilde{c}(V)$ teljesül valamely M teljes párosításra és c súlyozott lefogásra, akkor M maximális súlyú teljes párosítás és c minimális összsúlyú súlyozott lefogás.
(2) Ha az M teljes párosítás pontos élekből áll, akkor $\tilde{w}(M) = \tilde{c}(V)$.

Egerváry algoritmusa (magyar módszer) maximális súlyú teljes párosítás keresésére páros gráfban Input: $n \times n$ táblázat (sorok ill. oszlopok a színosztályok, a mezőkbe írt számok az élsúlyok). Output: súlyozott lefogás és teljes párosítás pontos élekből.

A sorokhoz 0 súlyt rendelünk, az oszlopokhoz pedig az adott oszlopban álló maximumot. Pontos élekből maximális méretű párosítást keresünk a tanult módon. Ha ez teljes párosítás, kész vagyunk, ha nem, akkor megkeressük a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhető sorokat és oszlopokat. Előbbieken növeljük, utóbbiakon csökkentjük a súlyozott lefogást a legnagyobb olyan ε értékkel, amivel még továbbra is súlyozott lefogást kapunk. Ezáltal a $\tilde{c}(V)$ csökken, és több oszlop lesz alternáló úton elérhető a fedetlen oszlopok halmazából. Innen iterálunk, azaz vagy nagyobb méretű párosítást találunk pontos élekből, vagy tovább csökkentjük a súlyozott lefogás összsúlyát. Előbb-utóbb meglesz a pontos élekből álló teljes párosítás.

Gyakorlatok

1. Gyakoroljuk hálózatban a maximális nagyságú st-folyam ill. minimális kapacitású st-vágás keresését.
2. Futtassuk az alternáló utas algoritmust páros gráfokon ill. 0/1-mátrixokon, utóbbi esetben a bástyaelrendezésben álló maximális számú 1-es keresésére. A talált megoldásról igazoljuk, hogy optimális. Ezek után a megadott páros gráf minden egyes e éléről döntsük el, hogy kaphatnánk-e a megtalált párosításnál nagyobbat akkor, ha e duplán számítana minden e-t tartalmazó párosításban. Példa jobbra ill. $V = \{1a, b, c, d, e, f, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és $E = \{a1, a2, a3, a4, b4, c4, c5, d2, d3, d, 4, d5, d6, e4, 45, f5\}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
3. Adott egy 0/1 mátrix és abban kijelöltünk k db bástyaelrendezésben álló 1-est. Hogyan lehet eldönteni, hogy található-e $k+1$ db bástyaelrendezésben álló 1-es? Ha nincs, akkor hogyan lehet erre gyorsan bizonyítékot találni?
4. A G teljes páros gráf két színosztályai legyenek $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ill. $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, az a_ib_j él súlya pediga jobb oldali mátrix i-edik sorának j-edik eleme. Találjunk a magyar módszerrel maximális súlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális).
$$\begin{pmatrix} 9 & 11 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
5. A jobb oldali mátrix a G páros gráf élsúlyozását mutatja: a színosztályoknak a sorok ill. az oszlopok felelnek meg, az (i, j) pozícióban álló elem az adott él súlyát mutatja. (Ha nincs él, akkor X áll a mátrixban.) Keressünk G-ben maximális súlyú párosítást.
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & X & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & X & 3 & 4 & X \\ 5 & 5 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$
6. A G teljes páros gráf színosztályai legyenek $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ill. $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, az a_ib_j-vel él súlya pedig legyen $|i - j^2|$. Adjunk meg G-ben egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális). (ZH '09.)
7. Legyenek a G teljes páros gráf színosztályai $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, az a_ib_j él súlya pedig legyen a jobb oldali mátrix i-edik sorának j-edik eleme.
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 7 & 9 & 10 \\ 7 & 7 & 8 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$
   (a) Súlyozott lefogás-e a $w(a_i) = i$, $w(b_i) = i + 1$ $(1 \leq i \leq 5)$?
   (b) Ha igen, igaz-e, hogy ez minimális összsúlyú súlyozott lefogás?
8. Az alábbi táblázat A, B, C és D sorai ill. 1, 2, 3 és 4 oszlopai alkotják a G páros gráf csúcshalmazát, a táblázatbeli számok pedig az adott sor és oszlop között futó él súlyát jelentik. Határozzuk meg az órán tanult módszerrel G egy maximális súlyú M párosítását, és igazoljuk egyúttal, hogy nincs G-ben M-nél nagyobb súlyú párosítás. (ZH'19)

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	2	6	3
B	7	5	9	8
C	5	2	7	3
D	7	3	9	5

9. Az alábbi táblázat A, B, C és D sorai ill. 1, 2, 3 és 4 oszlopai alkotják a G páros gráf csúcshalmazát, a táblázatbeli számok pedig az adott sor és oszlop között futó él súlyát jelentik. Határozzunk meg G éleinek egy minimális összsúlyú lefogását, és igazoljuk, hogy nincs G éleinek nincs ennél kisebb összsúlyú lefogása. (pZH'19)

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	0	1	9
B	0	8	6	11
C	1	5	7	12
D	9	11	12	16