# Kombinatorikus optimalizálás 2017. tavasz

1. gyakorlat — 2017. február 16.

1. A $G$ teljes páros gráf két színosztályai legyenek $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ill. $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, az $a_ib_j$ él súlya pediga jobb oldali mátrix $i$-edik sorának $j$-edik eleme. Találjunk a magyar módszerrel maximális súlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális).
$$\begin{pmatrix} 9 & 11 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. A jobb oldali mátrix a $G$ páros gráf élsúlyozását mutatja: a színosztályoknak a sorok ill. az oszlopok felelnek meg, az $(i, j)$ pozícióban álló elem az adott él súlyát mutatja. (Ha nincs él, akkor $X$ áll a mátrixban.) Keressünk $G$-ben maximális súlyú párosítást.
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & X & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & X & 3 & 4 & X \\ 5 & 5 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

3. A $G$ teljes páros gráf két színosztályai legyenek $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ill. $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, az $a_ib_j$-vel él súlya pedig legyen $|i - j^2|$. Adjunk meg $G$-ben egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális). (ZH '09.)

4. Legyenek a $G$ teljes páros gráf színosztályai $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, az $a_ib_j$ él súlya pedig legyen a jobb oldali mátrix $i$-edik sorának $j$-edik eleme.
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 7 & 9 & 10 \\ 7 & 7 & 8 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$
   (a) Súlyozott lefogás-e a $w(a_i) = i$, $w(b_i) = i + 1$ $(1 \le i \le 5)$?
   (b) Ha igen, igaz-e, hogy ez minimális összsúlyú súlyozott lefogás?

5. Kisvakond azon gondolkozik, hogy barátaival nadrágüzletet nyit az erdőben. Terveik szerint vakondok és nyulak részére fognak nadrágot árulni. A vakondok részére készülő nadrághot 6 perc alatt lehet kiszabni, 8 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A nyulak részére készülőt pedig 12 perc alatt lehet kiszabni, 4 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A rák, aki az anyagot szabja, hetente 1800 percet tud dolgozni, a nádirigó, aki a nadrágokat varrja össze, heti 1400 percet, míg a felesége, aki a gombfelvarrást vállalja, csak 200 percet hetente. Terveik szerint a vakondoknak való nadrágot 10 erdei petákért a nyulaknak valót 12 petákért adják. Melyik nadrágból hány darabot készítsenek, ha a bevételüket akarják maximalizálni?

6. Kisvakondék azon töprengenek, hogy megváltoztatják a nyulak részére készülő nadrág árát.
   (a) Mennyi a nyulak részére készülő nadrág minimális- illetve maximális ára, amely mellett az 5. feladatnál kapott értékek mellett maximális bevételt kapunk?
   (b) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 175 vakondnadrágot és 0 nyúlnadrágot gyártanak?
   (c) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak valót?
   (d) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 130 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 70 nyulaknak valót?
   (e) Lehetséges-e úgy megváltoztatni mindkét típusú nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak valót?

7. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások! $u$ és $v$ oszlopvektorokat jelölnek, $a$ sorvektort a 0 pedig a nullvektort (is). Mindegyik vektor dimenziója azonos.
   (a) Ha $u \le v$ és $u \ne v$ akkor $u < v$.
   (b) Ha $u \le v$ és $u \ge v$ akkor $u = v$.
   (c) Ha $u \ge 0$ és $a \cdot u > 0$ akkor $a \ge 0$.
   (d) Ha $u \le v$ és $a \ge 0$ akkor $a \cdot u \le a \cdot v$.

8. Oldjuk meg Fourier-Motzkin elimináció segítségével az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket, ill. határozzuk meg mindazon $p$ értékeket, amelyre megoldható a rendszer.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &\le 5 \\ x + 2y - z &\le 4 \\ z &\le 1 \\ x - 2y - 2z &\ge -5 \\ x + y + z &\ge 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + y + z &\le 5 \\ x + 2y - z &\le 4 \\ z &\le 1 \\ x - 2y - 2z &\ge -5 \\ x + y + z &\ge 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + y + z &\le 5 \\ x + 2y - z &\le 4 \\ z &\le 1 \\ x - 2y - 2z &\ge -5 \\ x + y + z &\ge 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\le 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &\le 12 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &\le 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &\le 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\ge p \end{aligned}$$

9. Döntsük el a Farkas-lemma segítségével, hogy megoldhatóak-e az alábbi egyenlőtlenségrendszerek:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_4 &\geq -3 \\ 3x_1 + x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 - 3x_4 &\leq 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_4 &\geq -3 \\ 3x_1 + x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 - 3x_4 &\leq 3 \end{aligned}$$

10. Írjuk fel az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszert $Ax \leq b$ alakban, majd a Farkas-lemma segítségével mutassuk meg, hogy a rendszer nem megoldható. (Más szóval: adjunk meg egy vektort és mutassuk meg róla, hogy ez a Farkas-lemma értelmében bizonyítja az $Ax \leq b$ rendszer megoldhatatlanságát.)

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 &\geq -2 \\ x_1 + 2x_3 - 8x_4 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_4 &\leq 2 \end{aligned}$$