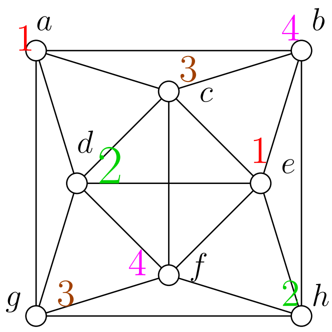
Kombinatorikus optimalizálás 2023. II. félév

1. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Gyakorlatok

1. Mennyi az ábrán látható két gráf kromatikus száma? (✓)



Az órán tanultak miatt $\chi(G) \geq \omega(G)$, azaz a kromatikus számra alsó becslés a maximális klikkméret. (1 pont)
A G gráf „középső” négy csúcsa egy 4-pontú klikket alkot, ezért $4 \leq \omega(G) \leq \chi(G)$, tehát a legalább 4 szín szükséges G színezéséhez. (4 pont)
Az ábrán látható a G gráf egy 4 színnel történő színezése, (3 pont)
azaz $\chi(G) \leq 4$. (1 pont)
Ezt az előző becsléssel összevetve $\chi(G) = 4$ adódik a kromatikus számra. (1 pont)

2. Állapítsuk meg, hány szín kell a bal oldali ábrán látható G gráf a, b, c, d, e, f, g, h sorrendben történő mohó színezéséhez. Milyen színt kap ekkor a h csúcs? (✓)

Az órán tanult mohó színezés során a soron következő csúcs mindig az első olyan színt kapja, ami különbözik a már korábban kiszínezett szomszédai színétől. (4 pont)
A megadott sorrendben ilyen módon kiszínezve a csúcsokat az ábrán látható színezést kapjuk. (4 pont)
A színezéshez tehát három színre volt szükség, (1 pont)
és a h csúcs az 1-es színt kapja. (1 pont)

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf csúcsait alkalmas sorrendben mohón színezve pontosan $\chi(G)$ színt használunk fel. Mutassunk példát olyan $2n$ csúcsú G páros gráfra, aminek a mohó színezéséhez n színre lehet szükség.

4. A G gráf csúcsait a sakktábla mezői, éleit pedig a huszár (bástya, futó, király) lehetséges lépései alkotják. Mennyi a G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?

5. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma? (✓)

G-ben van K_8, szóval $\chi \geq 8$. De 8 szín elég is, ciklikusan.

6. Van-e olyan G gráf, amiben nincs K_4 klikk, de G mégsem színezhető ki 3 színnel? (✓)

Persze, pl egy C_5 és egy teljes fokú csúcs.

7. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$. (✓)

Triviális a definícióból, a másodikhoz meg a H-n és a K-n különböző színeket kell használni.

8. Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

Bármely két színosztályok között fut legalább egy él, különben kevesebb szín is elég volna.

9. Legfeljebb mennyi lehet egy legfeljebb 100-élű egyszerű gráf kromatikus száma?

Tegyük fel, hogy a G gráf legfeljebb 100 élű, és a lehető legkevesebb színnel van kiszínezve. Ekkor bármely két színosztály között kell élnek vezetnie, ugyanis ha két színosztály csúcsai között nem vezetne él, akkor e két színosztály csúcsait közös színnel színezve a kromatikus számánál eggyel kevesebb színnel tudnánk G-t kiszínezni, ami lehetetlen. (3 pont)
Ez azt jelenti, hogy ha k színosztály van a színezésben, akkor $100 \geq \binom{k}{2}$ (3 pont)
Mivel $\binom{15}{2} = 15 \cdot 7 = 105 > 100$, ezért a kromatikus szám 15-nél bizonyosan kisebb. (2 pont)
A 14 viszont elérhető, pl K_{14} megfelel. (1 pont)
A feladat kérdésére tehát 14 a válasz. (1 pont)

10. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$? És ha $\chi(G) \leq 3$?

11. Mik azok a véges, egyszerű G gráfok, melyekre $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - e) < 3$ $\forall e \in E$? Milyen n-csúcsú, egyszerű G gráfra teljesül, hogy $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - v) < 3$ $\forall v \in V$?

12. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfba bárhogyan is húzunk be egy e élt az egyszerűség megtartásával, $\chi(G) < \chi(G + e)$ teljesül a kapott gráf kromatikus számára. Bizonyítsuk be, hogy a mohó színezés G színezéséhez minden esetben $\chi(G)$ színt használ.

13. Legyen G egy n pontú egyszerű gráf, melynek maximális klikkmérete $\omega(G) = 2$ és kromatikus száma $\chi(G) = k$. Képezzük a G' gráfot úgy, hogy lerajzoljuk a G gráf k diszjunkt példányát, és felveszünk még n^k további pontot pontot. Minden ilyen pontnak G minden egyes példányából $1-1$ szomszédja lesz, mégpedig úgy, hogy ne legyen két ilyen pontnak azonos a szomszédsága. Mutassuk meg, hogy $\omega(G') = 2$, valamint, hogy $\chi(G') = \chi(G) + 1 = k + 1$ teljesül.
14. Igazoljuk Mycielski tételét, miszerint tetszőleges $k \geq 2$ egészre létezik olyan G_k gráf, melyre $\chi(G_k) = k$ és $\omega(G_k) = 2$.
15. Órarendet kell készíteni az általános iskolában. Minden osztálynak legfeljebb 25, minden tanárnak pedig legfeljebb 22 órája van egy héten. Igaz-e, hogy biztosan készíthető olyan órarend, hogy minden hétköznap csak az első 5 órában legyen tanítás? (Lukas órája a tanároknak és az osztályoknak is lehet.)

    Osztály-tanár páros multigráfot készítünk a megtartani szükséges órák az élek. Itt $\Delta \leq 25$, ezért az élek 25 színnel színezhetők Kőnig tétele miatt. Az egyes színek lesznek az egyes időpontok. Így a színezés segítségével megadható a kívánt tulajdonságú órarend.
16. Tegyük fel, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf minden fokszáma 42. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.

    A Vizing-tétel miatt a válasz 42 vagy 43. Ha 42 volna, akkor minden színosztály teljes párosítás lenne, ami 99 csúcsú gráfon nem lehetséges. Ezért $\chi'(G) = 43$.
17. Tegyük fel, hogy G minden csúcsa úgy van kiszínezve a piros és zöld színek valamelyikére, hogy G-nek nincs olyan páratlan hosszúságú köre, amelynek csúcsai egyszínűek. Igazoljuk, hogy G kromatikus számára $\chi(G) \leq 4$ teljesül. (*)

    Mivel az azonos színűre színezett csúcsok nem alkotnak páratlan kört, ezért a piros csúcsok is és a zöld csúcsok is páros gráfot feszítenek G-ben. (4 pont)
    Ezek szerint az eredetileg piros csúcsokat ki lehet színezni két színnel (mondjuk tulipirossal és karmazsinnal) úgy, hogy egyetlen élnek se legyen mindkét végpontja tulipiros vagy karmazsin. (3 pont)
    Hasonlóan, az eredetileg zöldre színezett csúcsok kiszínezhetők a keki és libazöld színekre úgy, hogy egyetlen élnek se legyen azonos zöld árnyalatú a két végpontja. (1 pont)
    Mivel a G gráf csúcsait a fentiek szerint 4 színnel színeztük úgy, hogy minden él különböző színű csúcsokat köt össze, ezért G kromatikus számára $\chi(G) \leq 4$ teljesül. (2 pont)
18. Bizonyítsuk be, hogy ha G egyértelműen színezhető 3-színnel (azaz G bármely 3-színezéséből bármely másik 3-színezése megkapható a színek cseréjével), akkor $|E(G)| \geq 2|V(G)| - 3$. (*)

Kombinatorikus optimalizálás 2023. II. félév

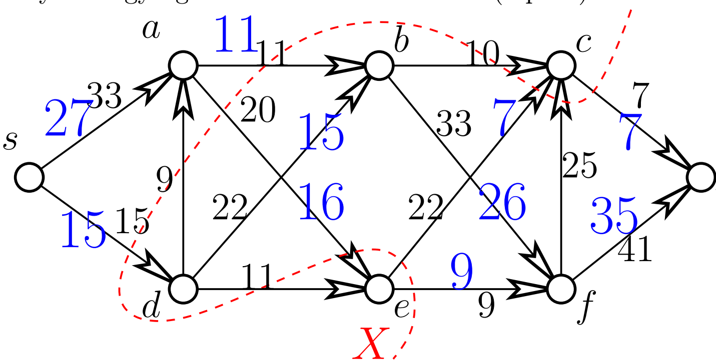
2. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Gyakorlatok

1. Mutassunk a bal oldali ábrán látható (G, s, t, c) hálózatban egy minimális kapacitású st-vágást. Találjunk a középső ábrán látható hálózatban minimális kapacitású st-vágást és bizonyítsuk be, hogy nincs a megtaláltnál kisebb kapacitású st-vágás. (✓)

   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 42 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy élen nincs ilyen szám, akkor azon $f = 0$.) (4 pont)

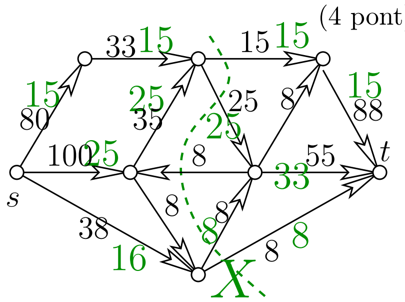
   A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sabct$ (7), $sdeft$ (9), $sdbft$ (6) $sabft$ (4), $saedbft$ (9), $saecbft$ (7) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)



   A megfelelő segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 42 kapacitású. (4 pont)
   Mivel a hálózatban létezik 42 nagyságú folyam, ezért tetszőleges st-vágás kapacitása legalább 42. Márpedig mi találtunk egy pontosan 42 kapacitású st-vágást. Ez azt mutatja, hogy az ábrán szaggatott vonallal jelzett st-vágás valóban minimális kapcitású. (2 pont)

   (A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált olyan folyamot és st-vágás, melyek nagysága ill. kapacitása megegyezik.)

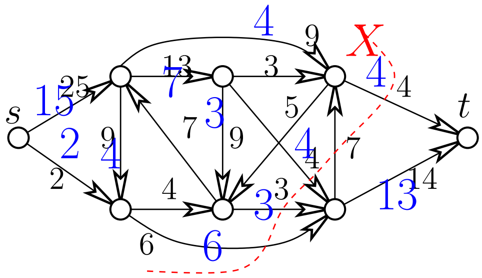
   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 56 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (zölddel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy élen nincs ilyen szám, akkor azon $f = 0$.) (4 pont)



   A megfelelő segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 56 kapacitású. (4 pont)
   Mivel a hálózatban létezik 56 nagyságú folyam, ezért tetszőleges st-vágás kapacitása legalább 56, mi pedig találtunk egy pontosan 56 kapacitású st-vágást. Ez azt mutatja, hogy az ábrán szaggatott vonall jelzett st-vágás valóban minimális kapcitású. (2 pont)

   (A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált olyan folyamot és st-vágás, melyek nagysága ill. kapacitása megegyezik.)

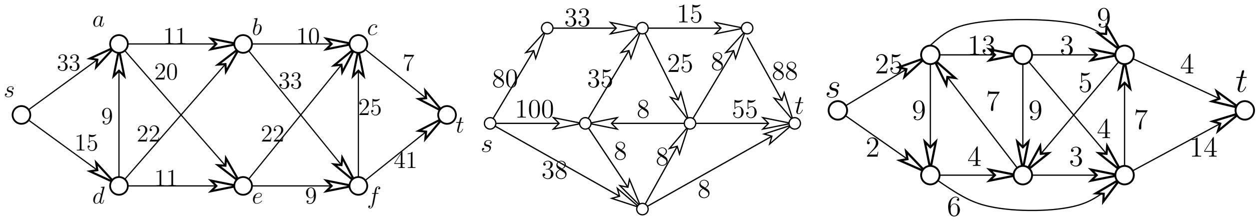
2. A sithek Sötét Testvérisége a jobb oldalon látható gráf s csúcsából készül csapást mérni a Jedi Tanács t támaszpontjára oly módon, hogy a sithek a gráf élei mentén szeretnének t-be eljutni. (Egy sith sosem halad visszafelé egy élen.) Az élekre írt számok azt jelzik, hány jedi őrszemet kell az adott útvonalra telepíteni ahhoz, hogy az ott próbálkozó sitheket megállítsák. Határozzuk meg, legalább hány őrszem szükséges a támaszpont biztosításához, azaz ahhoz, hogy egyetlen sith se tudjon s-ből t-be jutni. (!)



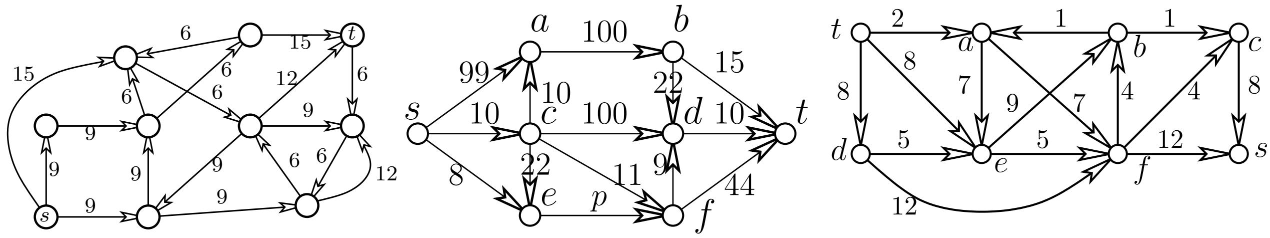
   A feladat megfogalmazható úgy is, hogy ha a megadott gráfban az élekre írt számokat az adott kapacitásnak értelmezzük, akkor minimális kapacitású st-vágást kell találnunk. (2 pont)
   Ezért az órán tanult növelő utas módszerrel maximális nagyságú folyamot keresünk, és ennek segítségével találjuk meg a minimális vágást. (2 pont)

   Az ábra egy 17 nagyságú folyamot mutat (a nagyobb, kékkel írt számok jelentik az adott élen a folyamértéket, ha nincs kék szám, akkor ez 0), (2 pont)
   ezért legalább 17 jedi őrszemre van szükség a támaszpont biztosításához. (1 pont)
   A szaggatott vonallal jelzett X halmaz egy 17 kapacitású st-vágást indukál, (1 pont)

ezért 17 jedi őrszem elegendő az esemény biztosításához. (1 pont)
A feladat kérdésére a válasz tehát 17. (1 pont)



3. Igaz-e, hogy az alábbi ábrához tartozó (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyamnagyság (folyamérték) pontosan 17? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.) (✓)



A maximális folyamnagyság megegyezik a minimális st-vágás kapacitásával. (3 pont)
Mivel minden él kapacitása 3-mal osztható, (2 pont)
ezért a minimális vágáskapacitás is 3 többszöröse (2 pont)
tehát a maximális folyamnagyság is 3-mal osztható. (2 pont)
A 17-et 3-mal osztva 2 maradékot kapunk, ezért a maximális folyamnagyság nem lehet 17. (1 pont)

Meg lehet oldani persze a feladatot a maximális folyam meghatározásával is.

A javító utak módszerével meghatároztunk egy 18 nagyságú folyamot az 2. ábrán látható módon, ahol a nagyobb számok a folyam által felvett értékeket jelentik. (8 pont)
Tehát a maximális folyamnagyság legalább 18, vagyis semmiképp sem 17. (2 pont)
(Mellesleg a maximális folyamnagyság pontosan 18, mégpedig a jelzett 18 kapacitású st-vágás miatt.)(0 pont)

4. Határozzuk meg a fenti középső hálózatban az ef él p kapacitásának összes olyan értékét, amire a maximális st-folyamnagyság pontosan 42.Határozzuk meg a maximális folyamnagyságot a p parméter függvényében.

Először $p = 0$-ra kerestünk maximális folyamot az órán tanult növelő utas algoritmussal. Az ábrán látható, 35 nagyságú folyamot kaptuk, ahol a kékkel írt nagyobb számok az adott élen folyó folyammennyiséget jelzik. (Amelyik élen nincs ilyen szám, ott 0 folyam folyik.) (3 pont)
A segédgráfban elérhető pontox X halmaza olyan st-vágást indukál az *eredeti* hálózatban, amelynek kapacitása $c(X) = 35 + p$. (2 pont)
Mivel egy 42 nagyságú st-folyamhoz az szükséges, hogy minden st-vágás kapacitása legalább 42 legyen, ezért ilyenkor $p \geq 7$. (2 pont)
Ha $p = 7$, akkor az ábrán látható folyam még növelhető 7-tel a $seft$ úton javítva, tehát $p = 7$ esetén a maximális folyamnagyság az X által indukált 42 kapacitású vágás miatt pontosan 42. (1 pont)
Ha azonban $p > 7$, akkor az említett $seft$ úton 7-nél több folyam is küldhető, így a maximális folyamnagyság 42-nél bizonyosan nagyobb lesz. (1 pont)
A válasz tehát az, hogy kizárólag $p = 7$ esetén lesz a maximális st-folyamnagyság pontosan 42. (1 pont)

5. Baj van: átszakadt a hegytetőn a zagytározó gátja. Szerencsére az iszap nem veszélyes, slaggal lemosható. A fenti jobb oldali ábrán t jelzi a tározót, s pedig a szerencsétlen helyen fekvő várost, amit meg kell védeni. A nyilak arra vezetnek, amerre az adott mélyedésben folyik a zagy. (Furcsa itt a gravitáció: megtörténhet, hogy végig lejt egy kiindulópontjába visszatérő útvonal.) A nyíl mellett álló számok azt mutatják, hogy a katasztrófavédelemnek hány percig tart elzárni az adott nyíl mentén lezúduló folyadék útját. Cél: a lehető leggyorsabban zárjunk le minden lehetséges s-be vezető utat az arra áramló melléktermék elől. Mivel csak egy munkagép működik, ezért a kiválasztott útvonalakat csak egymás után zárhatjuk le. Segítsünk a katasztrófavédelemnek: határozzuk meg, mennyi a szükséges legrövidebb idő, ami alatt a munka elvégezhető. Bizonyítsuk be azt is, hogy kevesebb idő nem elég minderre. (!)

Ha a feladathoz tartozó ábra gráfját hálózatként értelmezzük, akkor az a célunk, hogy ebben a hálózatban minimális kapacitású ts-vágást találjunk. (A ts-vágás kapacitását (szemben az st-vágással a t-t tartalmazó rész felől az s-t tartalmazó rész felé mutató élek összkapacitása adja.) (3 pont)

A minimális ts-vágás meghatározását a hálózat egy maximális folyamának megkeresésével az órán tanult módon végeztük el. (3 pont)
Azt kaptuk, hogy az ábrán szaggatottal jelölt vágás kapacitása 17, az apróbb számokkal jelölt folyam nagysága pedig 17. (Amelyik élen nincs más szám a kapacitáson kívül, ott nem folyik folyam, azaz $f(e) = 0$.) (2 pont)
A folyam létezése miatt bármely ts-vágás kapacitása legalább 17. Ezek szerint valóban minimális ts-vágást találtunk, (1 pont)
így a válasz az, hogy a katasztrófavédelemnek legalább 17 percre van szüksége, (1 pont)
és ehhez a kijelölt ts-vágás t-től s felé futó éleket kell lezárni. (0 pont)

Ez egy gonosz feladat: nemcsak azért, mert az s és t szerepe felcserélődött, hanem amiatt is, hogy a folyamnak (ami a vágás minimalitását bizonyítja) nincs szemléletes jelentése, szemben a megszokott modellel, aholis vmi termék áramlik.

6. Adott a D irányított gráf valamint élein egy c kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha s, t és w a D olyan csúcsai, hogy létezik D-ben m nagyságú st-folyam és m nagyságú tw-folyam is, akkor D-ben létezik m nagyságú sw-folyam. (!)

Ha nem lenne m nagyságú sw-folyam, akkor lenne m-nél kisebb kapacitású sw-vágás, ami egyúttal egy m-nél kisebb kapacitású st-vágás vagy tw-vágás is lenne. De ilyen nem lehet, hisz van m nagyságú st-folyam és tw-folyam is.

7. Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas pozitív ε-nal csökkentve a maximális folyamnagyság is pontosan ε-nal csökken? Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas ε-nal növelve, a maximális folyamnagyság is ε-nal növekszik? Ha a fenti állítások valamelyike nem mindig igaz, akkor hogyan tudjuk egy adott hálózat esetén eldönteni, hogy létezik-e a kívánt tulajdonságú él? (✓)

Tetszőleges minimális vágás tetszőleges élén csökkentve a kapacitást a minimális st-vágáskapacitás csökken, így a maximális folyamnagyság is. Ha azonban nincs olyan él, ami minden minimális st-vágás kapacitásához hozzájárul, akkor bárhol is növelünk, attól nem változik a minimális vágáskapacitás, így a maximális folyamnagyság sem. Ilyen pl. egy kétélű st-út, ahol mindkét él kapacitása egységnyi. A második tulajdonsággal rendelkező él olyan éle a gráfnak, amely minden minimális vágás kapacitásához hozzájárul. Úgy lehet eldönteni ennek létezését, hogy megkeressük azt a minimális st-vágást, amelynek s felőli oldalán a legkevesebb csúcs van (ezt találjuk meg a tanult algoritmussal), és megkeressük azt is, amelynek a t felőli oldalán van minimális számú csúcs. Ez utóbbit úgy találjuk meg, hogy vesszük az st-úttal nem rendelkező segédgráfnak azokat a csúcsait, amelyekből t elérhető. A keresett élek pontosan azok lesznek, amelyek mindkét vágás kapacitásához hozzájárulnak.

8. Legyen s és t egy kocka két átellenes csúcsát, és irányítsuk a kocka éleit s-től t felé. Hogyan osszunk adjunk 4 élnek 1, 4 élnek 2 és 4 élnek 3 kapacitást úgy, hogy a kapott hálózatban a maximális st-folyam nagysága a lehető legnagyobb legyen? (*)

9. Igazoljuk, hogy ha a (G, s, t, c) hálózatban a c kapacitások egészek és f egy megengedett folyam, akkor van olyan f' egészfolyam is, amire $\lfloor f(e) \rfloor \le f'(e) \le \lceil f(e) \rceil$ teljesül minden e élre. (*)

Csak azokat az éleket nézzük, ahol tört mennyiségű folyam folyik. Ezen éleken a Kirchhoff szabály miatt miatt találunk st-utat vagy (irányítatlan értelemben vett) kört. Egy ilyen mentén tudjuk úgy változtatni a folyamot, hogy valamelyik élen egész nagyságú folyam folyjék. Mindezt egészen addig végezhetjük, amíg van tört él.

10. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális nagyságú st-folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális nagyságú st-folyam nagysága legalább 15.

Legyen f, g és h egy-egy 10 nagyságú folyam, amely csak a piros-fehér, piros-zöld ill. fehér-zöld éleket használja. Ekkor $\frac{f+g+h}{2}$ megengedett folyam, és nagysága 15.

Azt se nehéz látni, hogy bármely st-vágás kapacitása is legalább 15.

11. Mutassuk meg a Ford-Fulkerson-tétel segítségével, hogy tetszőleges G páros gráfra $\nu(G) = \tau(G)$ teljesül a független élek maximális és a lefogó pontok minimális számára.

A ps gráf éleit lefelé irányítjuk, felül felveszünk egy s termelőt, alul egy t fogyasztót, és a megfelelő csúcsokból irányított éleket a terminálokhoz. Minden élkapacitás 1.

Pontosan akkor van k méretű párosítás G-ben, ha van k nagyságú egészfolyam a hálózatban, ezért az EgÉr lemma miatt maxfolyam nagyságát keressük. A Ford-Fulkerson miatt meg ez a minvágás kapacitása. A minvágást indukáló X halmazról feltehető, hogy $X \cap A$-ból nem fut él $B - X$-be (A a felső, B az alsó színosztály), mert ha egy a csúcsból futna ilyen él, akkor a-t kivehetjük X-ből, és ezzel a vágás kapacitása nem nőhet. Ilyen cserékkel elérhető, hogy $(X - A) \cup (B \cap X)$ lefogó ponthalmaz legyen, ráadáasul ennek az elemszáma épp a vágás kapacitása, vagyis a maxfolyam nagysága, még másképp a max egészfolyam nagysága, azaz $\nu(G)$.

12. A 9. feladat segítségével mutassuk meg, hogy ha G páros gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$.

    Készítsük el a páros gráfból a szokásos (az előző feladatban is használt) hálózatot egységnyi kapacitásokkal. Legyen x az a folyam, ami G minden éléhez $\frac{1}{\Delta}$ értéket rendel. Így a terminálokra illeszkedő éleken a folyam értéke 0 és 1 közé esik. A 9 feladat alapján kerekíthetjük ezt a folyamot. Így minden Δ fokú csúcsból G-nek pontosan egy olyan éle indul, amin 1 a folyam értéke, ráadásul ezek az élek párosítást alkotnak. Adjuk ezen éleknek a Δ sorszámú színt, és töröljük mindezen éleket. A maradék gráf maxfokszáma 1-gyel csökken, ugyanezzel a módszerrel találjuk meg a $\Delta - 1$ sorszámú színre színezett éleket is, stb.

13. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$ méretű táblázat mezőin úgy helyeztünk el kavicsokat, hogy egyetlen sorban és egyetlen oszlopban sincs 42-nél több kavics. Bizonyítsuk be, hogy a mezőkön elhelyezett kavicsok legfeljebb 42 csoportba oszthatók úgy, hogy a kavicsok minden csoportban bástyaelhelyezést alkossanak.

    A táblázat sorai ill. oszlopai a G páros gráf csúcsai, a kavicsok az élek. Kőnig élszínezési tétele szerint a kavicsok 42 színnel színezhetők, és minden színosztály egy bástyaelhelyezésnek felel meg.

14. Az alábbi táblázatban álló X-ek közül legfeljebb hányat lehet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott X-ek bástyaelhelyezést alkossanak?

	X		X		
	X			X	
			X	X	
X		X			X
	X			X	
			X		

    Az alternáló utas algoritmust kéne gyakorolni a mátrixreprezentáción. A maximum meghatározásához nem elég megtalálni a maximális számú X-et: be is kell bizonyítani, hogy több nem található. Ez a fedetlen oszloból lépcsős úton elérhető sorok és oszlopok vizsgálatával tehető meg. A fedett oszlopok és a fedetlenből elérhető sorok együttesen lefognak minden X-et, és épp annyian vannak, ahány X-et megtaláltunk. Jelen esetben a 2-dik,4-dik és 5-dik oszlopok a 4-dik sorral ilyen halmazt alkotnak.

15. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is szedünk szét egy 54-lapos francia kártya csomagot 13 db 4 lapos csomagra, ki lehet választani mind a 13 csomagból egy-egy kártyát úgy, hogy csupa különböző értékű lapot válasszunk. (Egy lap értéke 13-féle lehet, mégpedig 2-től ászig.)

    A G páros gráf csúcsai a 13 csomag ill. a 13 kártyaérték. Az egyes lapok az élek. Ekkor G 4-reguláris (nem feltétlenül egyszerű) gráf, ezért Kőnig élszínezési tétele miatt élkromatikus száma 4. Az élek tetsz. 4-színezésének bármelyik színosztálya megoldja a feladatot.

Kombinatorikus optimalizálás 2023. tavasz

3. gyakorlat 2023. március 16.

Gyakorlatok

1. Futtassuk az alternáló utas algoritmust páros gráfokon ill. 0/1-mátrixokon, utóbbi esetben a bástyaelrendezésben álló maximális számú 1-es keresésére. A talált megoldásról igazoljuk, hogy optimális. Ezek után a megadott páros gráf minden egyes e éléről döntsük el, hogy kaphatnánk-e a megtalált párosításnál nagyobbat akkor, ha e duplán számítana minden e-t tartalmazó párosításban. Példa jobbra ill. $V = \{a, b, c, d, e, f, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és $E = \{a1, a2, a3, a4, b4, c4, c5, d2, d3, d4, d5, d6, e4, e5, f5\}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Adott egy 0/1 mátrix és abban kijelöltünk k db bástyaelrendezésben álló 1-est. Hogyan lehet eldönteni, hogy található-e $k + 1$ db bástyaelrendezésben álló 1-es? Ha nincs, akkor hogyan lehet erre gyorsan bizonyítékot találni?
3. A G teljes páros gráf két színosztályai legyenek $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ill. $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, az a_ib_j él súlya pedig a jobb oldali mátrix i-edik sorának j-edik eleme. Találjunk a magyar módszerrel maximális súlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális).
$$\begin{pmatrix} 9 & 11 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
4. A jobb oldali mátrix a G páros gráf élsúlyozását mutatja: a színosztályoknak a sorok ill. az oszlopok felelnek meg, az (i, j) pozícióban álló elem az adott él súlyát mutatja. (Ha nincs él, akkor X áll a mátrixban.) Keressünk G-ben maximális súlyú párosítást.
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & X & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & X & 3 & 4 & X \\ 5 & 5 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$
5. A G teljes páros gráf színosztályai legyenek $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ill. $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, az a_ib_j-vel él súlya pedig legyen $|i - j^2|$. Adjunk meg G-ben egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális). (ZH '09.)
6. Legyenek a G teljes páros gráf színosztályai $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, az a_ib_j él súlya pedig legyen a jobb oldali mátrix i-edik sorának j-edik eleme.
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 7 & 9 & 10 \\ 7 & 7 & 8 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$
   (a) Súlyozott lefogás-e a $w(a_i) = i$, $w(b_i) = i + 1$ $(1 \leq i \leq 5)$?
   (b) Ha igen, igaz-e, hogy ez minimális összsúlyú súlyozott lefogás?
7. Az alábbi táblázat A, B, C és D sorai ill. $1, 2, 3$ és 4 oszlopai alkotják a G páros gráf csúcshalmazát, a táblázatbeli számok pedig az adott sor és oszlop között futó él súlyát jelentik. Határozzuk meg az órán tanult módszerrel G egy maximális súlyú M párosítását, és igazoljuk egyúttal, hogy nincs G-ben M-nél nagyobb súlyú párosítás. (ZH'19)

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	2	6	3
B	7	5	9	8
C	5	2	7	3
D	7	3	9	5

Az órán tanult Egerváry algoritmus segítségével keresünk teljes párosítást: kiindulunk az oszlopmaximumokhoz ill a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken maximális párosítást keresünk. Ha ez nem teljes, akkor a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhetõ oszlopokon csökkentünk, a sorokon pedig növeljük a lefogást az alábbiak szerint, addig, amíg lesz a pontos élekbõl teljes párosítás. (2 pont)

5	2	7	5
5	3	7	6
7	5	9	8

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	$\boxed{2}$	6	3
B	7	5	9	$\boxed{8}$
C	$\boxed{5}$	2	7	3
D	7	3	$\boxed{9}$	5

0	0	0
0	2	3
0	0	0
0	2	2

A kiindulási súlyozott lefogás az $1, 2, 3$ és 4 csúcsokon a megfelelõ oszlopmaximum, azaz $7, 5, 9$ és 8, a többi csúcson 0. (2 pont)
Az ábrán az algoritmust követve kapott súlyozott lefogások, bekeretezve pedig egy pontos élekbõl álló teljes párosítás elemei láthatók. (3 pont)
Egy 24 súlyú párosítást és egy 24 összsúlyú lefogást kaptunk. Utóbbi miatt nem létezik 24-nél nagyobb összsúlyú súlyozott lefogás, azaz a kapott párosítás csakugyan maximális súlyú. (2 pont)
Ezért az $A2, B4, C1, D3$ élek egy maximális súlyú teljes párosítást alkotnak G-ben. (1 pont)

8. Az alábbi táblázat A, B, C és D sorai ill. $1, 2, 3$ és 4 oszlopai alkotják a G páros gráf csúcshalmazát, a táblázatbeli számok pedig az adott sor és oszlop között futó él súlyát jelentik. Határozzunk meg G éleinek egy minimális összsúlyú lefogását, és igazoljuk, hogy nincs G éleinek nincs ennél kisebb összsúlyú lefogása. (pZH'19)

	1	**2**	**3**	**4**
A	2	0	1	9
B	0	8	6	11
C	1	5	7	12
D	9	11	12	16

Az órán tanult Egerváry algoritmus segítségével keresünk teljes párosítást: kiindulunk az oszlopmaximumokhoz ill a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken maximális párosítást keresünk. Ha ez nem teljes, akkor a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhetõ oszlopokon csökkentünk, a sorokon pedig növeljük a lefogást az alábbiak szerin, addig, amíg lesz a pontos élekbõl teljes párosítás. (3 pont)

	2	7	5	11						
	3	8	6	11						
	4	8	7	11						
	5	8	8	12						
	6	8	9	13						
	9	11	12	16						
	1	**2**	**3**	**4**						
A	$\boxed{2}$	0	1	9	0	0	0	0	0	0
B	0	$\boxed{8}$	$\underline{6}$	11	0	0	0	0	0	1
C	1	5	7	$\boxed{12}$	0	0	0	1	1	1
D	$\underline{9}$	11	$\boxed{12}$	16	0	3	4	5	6	7

A kiindulási súlyozott lefogás az $1, 2, 3$ és 4 csúcsokon a megfelelõ oszlopmaximum, azaz $9, 11, 12$ és 16, a többi csúcson 0. (2 pont)
Az ábrán az algoritmust követve kapott súlyozott lefogások, bekeretezve pedig egy pontos élekbõl álló teljes párosítás elemei láthatók. (3 pont)
Egy 34 súlyú párosítást és egy 34 összsúlyú lefogást kaptunk. Elõbbi miatt nem létezik 34-nél kisebb összsúlyú súlyozott lefogás, azaz a kapott lefogás csakugyan minimális összsúlyú. (3 pont)

9. Bármilyen kemény munka is a locsolkodás, a kijárási korlátozás miatt mindenki csak egy helyen végezheti ezt. Három (fiú)testvér (**A**, **B** és **C**) próbál minél több piros tojást gyűjteni a jeles alkalommal. Öt lehetséges helyre mehetnek (**1**, **2**, **3**, **4** és **5**) és az alábbbi táblázatba gyűjtötték, hogy mennyi tojásra számítanak az egyes locsolók, ha az adott helyen öntöznek. Határozzuk meg, hogy legfeljebb hány tojást tudnak ilyen feltételek mellett összegyűjteni.

	A	**B**	**C**
1	9	11	7
2	13	11	10
3	10	12	9
4	14	20	16
5	10	10	8

Adjunk ehhez egy locsolási tervet, és mutassuk is meg, hogy az így megszerezhetőnél nem gyűjthető több tojás a fenti feltételek mellett. (ZH'20)
(Figyelem: három fiú csak három helyen locsolhat!)

Egy maximális súlyú párosítást kell kesresnünk abban a páros gráfban, amelyiknek egyik színosztályában az A, B, C, a másikban pedig az $1, 2, 3, 4, 5$ csúcsok vannak. Az élsúlyok a táblázatban látható tojásszámok. (2 pont)
A tanult Egerváry-algoritmust csak négyzetes mátrixokra tudjuk alkalmazni, ezért még bevezetünk két virtuális testvért, akik bárhol 0 tojást tudnak gyűjteni. Ezáltal egy 5×5 méretű táblázatot kapunk, amelyiknek a teljes párosításai megfelelnek a lehetséges tojáslogikusztikáknak. (2 pont)
Ebben az 5×5-ös táblázaban kell tehát az Egerváry-algoritmus segítségével teljes párosítást keresünk: kiindulunk az oszlopmaximumokhoz ill a sorokon 0 súlyhoz tartozó súlyozott lefogásból, és a pontos éleken keresünk maximális párosítást. Ha ez nem teljes, akkor a fedetlen oszlopokból alternáló úton elérhető oszlopokon csökkentünk, a sorokon pedig növeljük a lefogást az alábbiak szerint, addig, amíg lesz a pontos élekből teljes párosítás. (1 pont)

	A	**B**	**C**	**D**	**E**				
1	9	11	7	0	$\boxed{0}$	0	0	0	0
2	$\boxed{13}$	11	10	0	0	0	0	0	1
3	10	12	$\boxed{9}$	0	0	0	0	0	0
4	14	$\boxed{20}$	16	0	0	0	1	6	7
5	10	10	8	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0
	14	20	16	0	0				
	13	19	15	0	0				
	13	14	10	0	0				
	12	13	9	0	0				

A kiindulási súlyozott lefogás az **A**, **B**, **C**, **D**, **E** csúcsokon a megfelelő oszlopmaximum, azaz $14, 20, 16, 0$ és 0, a többi csúcson 0. (1 pont)
Az ábrán az algoritmust követve kapott súlyozott lefogások, bekeretezve pedig egy pontos élekből álló teljes párosítás elemei láthatók. (1 pont)
Egy 42 súlyú párosítást és egy 42 összsúlyú lefogást kaptunk. Utóbbi miatt nem létezik 42-nél nagyobb összsúlyú teljes párosítás, ezért az előzetes táblázat alapján a megszerezhető tojások maximális száma pontosan 42. (2 pont)
Ez a maximum pedig úgy érhető el, ha az **A** testvér a **2**-es, a **B** a **4**-es, **C** pedig a **3**-as helyszínen dolgozik. (1 pont)

Az is teljes értékű megoldás, ha megfigyeljük, hogy az **1**-es é **5**-ös helyszínekre senkinek sem érdemes elmennie, hiszen a maradék helyszínek bármelyikén legalább annyi tojást gyűjthtet. Így egy 3×3-as táblázat marad, ahol akár az Egerváry-algoritmussal, akár a 6 lehetőség ellenőrzésével célt érünk.

10. A G páros gráf élei az $\{A, B, C, D\}$ ill. $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ ponthalmazok között futnak. A mellékelt táblázat az élek súlyát adja meg. Van-e olyan minimális súlyú súlyozott lefogás, amely az A, B, C ill. D. pontokhoz a jobb oldali oszlopban található számokat rendeli? (Ha van ilyen, akkor azt adjuk meg, és bizonyítsuk róla, hogy minimális, ha nincs, akkor adjunk meg egy olyan súlyozott lefogást, amely kisebb összsúlyú, mint bármely olyan, ami a jobb oldali oszlopból megkapható.) (pZH '20)

	1	**2**	**3**	**4**	
A	7	9	7	10	5
B	2	4	3	7	1
C	5	7	3	7	3
D	5	5	4	8	2

	1	**2**	**3**	**4**	
A	7	9	$\boxed{7}$	10	5
B	2	4	3	$\boxed{7}$	1
C	5	$\boxed{7}$	3	7	3
D	$\boxed{5}$	5	4	8	2
	3	4	2	6	

Először úgy választjuk ki a lehető legkisebb súlyokat az $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$ csúcsokhoz, hogy azok a lehető legkisebb összsúlyú súlyozott lefogást alkossák a feladatban meghatározott súlyokkal. Ehhez a táblázat minden oszlopához kiválasztjuk a legnagyobb olyan számot, amit úgy kapunk, hogy az adott oszlop eleméből kivonjuk az adott elem sorában álló előre megadott súlyt. Az így kapott értékek láthatók a bal oldali táblázat alsó sorában. (4 pont)

Az így kapott súlyozott lefogásra pontos élekből található teljes párosítás, pl a bekeretezett mezőkön állók ilyet adnak. (2 pont)

A kapott 26 összsúlyú teljes párosítást miatt minden súlyozott lefogás összsúlya legalább 26. (2 pont)

Mivel a megadott súlyokat egy pontosan 26 összsúlyú súlyozott lefogássá terjesztettük ki, ezért ez egy minimális összsúlyú súlyozott lefogás, a feladat kérdésére tehát igen a válasz. (2 pont)

11. Az $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$ csúcsokkal rendelkező páros gráf élsúlyait az alábbi táblázat tartalmazza. Súlyozott lefogást alkotnak-e a sorok mellett és az oszlopok alatt álló számok? Ha igen, akkor döntsük el, hogy minimális súlyú-e ez a súlyozott lefogás. Ha igen, igazoljuk ezt, ha nem, akkor adjunk egy kisebb súlyú súlyozott lefogást.

	A	**B**	**C**	**D**	
1	7	8	6	6	4
2	6	5	4	3	2
3	7	8	5	4	4
4	5	4	3	4	2
	4	4	2	2	

Könnyen ellenőrizhető, hogy a táblázat egyetlen mezejében álló szám sem nagyobb a megfelelő sor végén és oszlop alján álló szám összegénél. Ezért ezek a számok valóban súlyozott lefogást alkotnak. (2 pont)

Aláhúzással megjelöltük a pontos éleket, ezeken keresünk teljes párosítást. (2 pont)

Találtunk is ilyet, a bekeretezett számok jelölik. (5 pont)

Találtunk tehát egy súlyozott lefogáshoz tartozó pontos éleken teljes párosítást, ezért az optimalitási feltételek teljesülése miatt a talált teljes párosítás maximális súlyú, a súlyozott lefogás pedig minimális összsúlyú. Ennek megfelelően a feladat kérdésére igen a válasz. (1 pont)

	A	**B**	**C**	**D**	
1	7	$\underline{8}$	$\boxed{\underline{6}}$	$\underline{6}$	4
2	$\boxed{\underline{6}}$	5	$\underline{4}$	3	2
3	7	$\boxed{\underline{8}}$	5	4	4
4	5	$\underline{6}$	3	$\boxed{\underline{4}}$	2
	4	4	2	2	

12. Legyen $F = (V, E)$ egy fa, és legyen $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ a fa élein egy hosszfüggvény. Az a cél, hogy F csúcsaiból minél több diszjunkt párt képezzünk úgy, hogy az egyes párokat a fában összekötő utak összhossza a lehető legnagyobb legyen. Adjunk gyors algoritmust, ami megtalál egy optimális párosítást, és írjunk le egy olyan bizonyítékot, ami minden esetben igazolja a talált párosítás optimalitását. (*)

Kombinatorikus optimalizálás 2023. tavasz

4. gyakorlat 2023. március 23.

Gyakorlatok

1. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások! u és v oszlopvektorokat jelölnek, a sorvektort a 0 pedig a nullvektort (is). Mindegyik vektor dimenziója azonos. ($u < v$ jelentése: $u \leq v$ és $u \neq v$.)
   (a) Ha $u \leq v$ és $u \neq v$ akkor $u < v$.
   (b) Ha $u \leq v$ és $u \geq v$ akkor $u = v$.
   (c) Ha $u \geq 0$ és $a \cdot u > 0$ akkor $a \geq 0$.
   (d) Ha $u \leq v$ és $a \geq 0$ akkor $a \cdot u \leq a \cdot v$.

2. Oldjuk meg Fourier-Motzkin elimináció segítségével az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket, ill. határozzuk meg mindazon p értékeket, amelyre megoldható a rendszer.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &\leq 5 \\ x + 2y - z &\leq 4 \\ z &\leq 1 \\ x - 2y - 2z &\geq -5 \\ x + y + z &\geq 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + y + z &\leq 5 \\ x + 2y - z &\leq 4 \\ z &\leq 1 \\ x - 2y - 2z &\geq -5 \\ x + y + z &\geq 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + y + z &\leq 5 \\ x + 2y - z &\leq 4 \\ z &\leq 1 \\ x - 2y - 2z &\geq -5 \\ x + y + z &\geq 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &\leq 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &\leq 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq p \end{aligned}$$

3. Írjuk fel az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszert $Ax \leq b$ alakban, majd döntsük el a Farkas-lemma segítségével, hogy megoldhatóak-e. (Azaz, ha nem megoldható, akkor adjunk meg egy y vektort és mutassuk meg róla, hogy ez a Farkas-lemma értelmében bizonyítja az $Ax \leq b$ rendszer megoldhatatlanságát.)

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_4 &\geq -3 \\ 3x_1 + x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 - 3x_4 &\leq 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_4 &\geq -3 \\ 3x_1 + x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 - 3x_4 &\leq 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 &\geq -2 \\ x_1 + 2x_3 - 8x_4 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_4 &\leq 2 \end{aligned}$$

4. Az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszernek hogyan lehet a Fourier-Motzkin-eliminációval meghatározni egy olyan megoldását, amelyikben az x_1 változó értéke a lehető legkisebb?

   Ha az x_1-et elimináljuk utoljára, akkkor a megoldás megkeresésekor x_1-nek adunk először értéket. Mivel minden megoldás megkapható az FM elimináció utáni értékadásos módszerrel, ezért az x_1-re kapott intervallumból kiválasztjuk x_1 számára a lekisebb lehetséges értéket.

5. Adjunk meg olyan módszert, ami tetszőleges $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszerhez az $x_1, \ldots$ változóknak olyan értékadását találja meg, amire a legjobban sérülő egyenlőtlenség a lehető legkevésbé sérül. Más szóval talájuk meg az egyenlőtlenségrendszernek egy megoldását, ha van, ha pedig nincs, akkor úgy válasszunk értéket a változóknak, hogy az $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots a_{i,n}x_n - b_i$ mennyiségek közül a legnagyobb a lehető legkisebb legyen.

   Bevezetünk egy z ismeretlent és minden $ax \leq b$ egyenlőtlenséget $ax \leq b + z$ egyenlőtlenséggel, minden $ax \geq b$ egyenlőtlenséget pedig $ax \geq b - z$ egyenlőtlenséggel helyettesítünk. Ha z-t elimináljuk utoljára, akkor tudunk olyan megoldást találni, amire z minimális, és épp ez a célunk.

6. Adjunk olyan módszert, aminek a segítségével tetszőleges $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszerhez található olyan megoldás, amire $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ minimális.

   Felveszünk egy új z ismeretlent és egy $z = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ egyenletet. Úgy oldjuk meg FM-eliminációval az egyenlőtlenségrendszert, hogy z legyen az utoljára eliminált változó. Ha nem kapunk tilos sort, akkor lesz megoldás, és az értékadás során z-vel kezdünk. Így aztán vagy meg tudjuk határozni z lehetséges legkisebb értékét, vagy azt kapjuk, hogy z-re nincs alsó korlát, azaz tetszőlegesen kis z esetén is van megoldás.

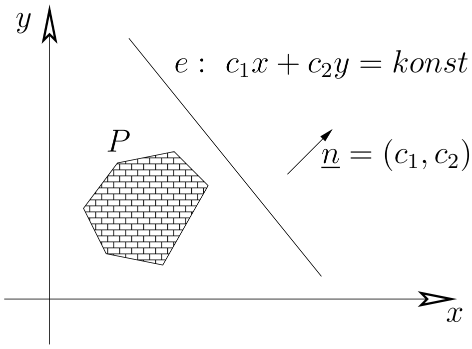
Kombinatorikus optimalizálás 2023. tavasz

5. gyakorlat 2023. március 30.

Gyakorlatok

1. Tegyük fel, hogy az x és y változókkal megadott kétváltozós lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldásai az xy-síkon egy P konvex sokszöget alkotnak. Határozuk meg, hogy melyek azok a megoldások, amelyek alkalmasan választott c_1, c_2 értékekkel maximalizálják a $c_1x + c_2y$ célfüggvényértéket. Ha ismerjük a P sokszög csúcsainak koordinátáit, akkor adott a c_1 és c_2, akkor hogyan lehet gyorsan megtalálni egy optimális megoldást?

A P konvex sokszögnek azt az (x, y) pontját (vagy azokat a pontjait) kell megtalálni, amelyre a lehető legnagyobb a $c_1x + c_2y$ összeg. Először vizsgáljuk meg, hogy hol helyezkednek el azok az (x, y) pontok a síkon (P-től függetlenül), amelyekre a $c_1x + c_2y$ összeg konstans, azaz $c_1x + c_2y = konst$. Jól ismert, hogy ez egy e egyenes egyenlete. Ráadásul, ha a *konst* értékét növeljük, akkor ettől az egyenes a (c_1, c_2) normálvektor irányába mozdul el.



Ha tehát a konvex sokszögnek a célfüggvényt maximalizáló pontját keressük, akkor az egyenest a normálvektor által mutatott irány szerinti „végtelen távolból” indítva addig kell tolni a P sokszög felé, amíg az eltoltnak közös pontja nem lesz P-vel. (Úgy is mondhatjuk, hogy megkeressük P-nek azt az e-vel párhuzamos *támaszegyenesét*, amitől a (c_1, c_2) normálvektor irányába már nem esik P-nek pontja.) A lineáris egyenlőtlenségrendszernek a $c_1x + c_2y$ célfüggvényt maximalizáló megoldásai tehát az egyenes ezen eltoltjának és P-nek a közös pontjai lesznek.

Világos, hogy ezen optimális megoldások halmaza vagy egy csúcsa vagy egy éle lesz P-nek. Az első esetben pontosan egy, a másodikban pedig pontosan két csúcs lesz optimális megoldás. A feladat tehát egyszerű: P minden csúcsára kiszámítjuk a célfüggvényértéket, és az a csúcs fog maximalizálni, amelyikre a legnagyobb ez a mennyiség. Ha két ilyen csúcs is van, akkor az általuk meghatározott szakasz minden más pontja is optimális megoldás (bár ez nem volt kérdés).

Két változó esetén (két dimenzióban) nagyon szemléletes, hogy ez a helyzet, és három változó (azaz 3 dimenzió) esetén sem nehéz meggyőzni magunkat, hogy ugyanerről van szó azzal a különbzéggel hogy támaszegyenes helyett támaszsíkot keresünk a 3D-beli konvex megoldáshalmazhoz. Szemléletesen nem világos, de precíz matematikai eszközökkel könnyen vizsgálható a 3-nál több változó, azaz a 3-nál magasabb dimenziós megoldástér esete is. Itt is hasonló a helyzet, csak pl. 4 dimenzióban a konvex halmazhoz egy 3-dimenziós támaszhipersíkot kell keresni, és az optimális megoldások között itt is lesz minimális lapja (pl csúcsa)[1] a megoldásokat leíró konvex poliédernek. Sajnos egyvalami nem lesz ennyire egyszerű: míg két dimenzióban a sokszögnek annyi csúcsa van, mint ahány oldala (tehát az optimális megoldás-jelöltek száma legfeljebb a lineáris egyenlőtlenségrendszerben szereplő egyenlőtlenségek száma), addig magasabb dimenzióban a poliéder csúcsainak száma nagyságrendekkel több lehet, mint a feladatot leíró feltételek száma. Ezért magasabb dimenzióban nem hatékony úgy keresni az optimumot, hogy a megoldáshalmaz csúcsain ellenőrizzük a célfüggvényértéket.

---

2. Adjunk példát a dualitástételben szereplő négy eset mindegyikére, azaz írjunk fel olyan x_1 és x_2 változókkal megadott primál feladatokat, amire a duális változók y_1 és y_2 és az LP ill. DLP megoldhatóságának minden lehetséges kombinációja előfordul. Mutassuk meg, hogy miért nem korlátos az célfüggvényérték, ha csak az egyik feladat oldható meg, és adjuk meg az optimális megoldásokat, ha mindkét feladatnak van megoldása.

[1]A minimális lap nem mindig csúcs, hiszen nem minden poliédernek van csúcsa: gondoljunk pl egy végelen hasábra, aminek a minimális lapjai egyenesek, élek.

Legyen az LP $\max cx_1 + dx_2$, ahol $x_1, x_2 \geq 0$, előjelmegkötés mellett $x_1 - x_2 \leq a$ ill. $x_1 - x_2 \geq -b$ a lineáris feltételek. Ekkor a DLP $\min ay_1 + by_2$, ahol $y_1, y_2 \geq 0$ a nemnegativitási és $y_1 - y_2 \geq c$ ill. $y_1 - y_2 \leq -d$ a lineáris feltételek. Az a, b választása dönti el, hogy megoldható-e az LP, a c, d választástól pedig a DLP megoldhatósága függ.

Bevezetve az $x = x_1 - x_2$ és $y = y_1 - y_2$ változókat, a linearitási feltételek $-b \leq x \leq a$ ill. $-d \leq y \leq c$ alakot öltenek. Megoldás pontosan akkor van, ha $-b \leq a$ ill. $-d \geq c$, azaz ha $a + b \geq 0$ ill. $c + d \leq 0$.

Tehát ha pl $a = b = 1$ és $c = d = -1$, akkor egyik feladat sem megoldható.

Ha mondjuk $a = b = c = d = 1$, akkor a primál megoldható, a duál nem, és $x_1 = x_2 = p$ tetsz. $p \geq 0$ esetén megoldás, amire a célfüggvényérték $cx_1 + dx_2 = (c + d)p = 2p$ tetszőlegesen nagy lehet.

Ha pedig $a = b = c = d = -1$, akkor a duál megoldható, a primál nem, és $y_1 = y_2 = p$ tetsz. $p \geq 0$ esetén megoldás, amire a célfüggvényérték $ay_1 + by_2 = (a + b)p = -2p$ tetszőlegesen kicsi lehet.

Végül, ha mondjuk $a = 1, b = 2$ és $c = -1, d = -2$, akkor $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ megoldja a primált és a duált, a hozzájuk tartozó célfüggvényérték pedig 0, ezért ezek optimális megoldások.

3. Kisvakond azon gondolkozik, hogy barátaival nadrágüzletet nyit az erdőben. Terveik szerint vakondok és nyulak részére fognak nadrágot árulni. A vakondok részére készülő nadrágot 6 perc alatt lehet kiszabni, 8 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A nyulak részére készülőt pedig 12 perc alatt lehet kiszabni, 4 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A rák, aki az anyagot szabja, hetente 1800 percet tud dolgozni, a nádirigó, aki a nadrágokat varrja össze, heti 1400 percet, míg a felesége, aki a gombfelvarrást vállalja, csak 200 percet hetente. Terveik szerint a vakondoknak való nadrágot 10 erdei petákért a nyulaknak valót 12 petákért adják. Melyik nadrágból hány darabot készítsenek, ha a bevételüket akarják maximalizálni?

4. Kisvakondék azon töprengenek, hogy megváltoztatják a nyulak részére készülő nadrág árát.
   (a) Mennyi a nyulak részére készülő nadrág minimális- illetve maximális ára, amely mellett az 3. feladatnál kapott értékek mellett maximális bevételt kapunk?
   (b) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 175 vakondnadrágot és 0 nyúlnadrágot gyártanak?
   (c) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak valót?
   (d) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 130 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 70 nyulaknak valót?
   (e) Lehetséges-e úgy megváltoztatni mindkét típusú nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak valót?

5. Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát!

$$\begin{aligned}
&\min\{x_1 - 2x_2 + x_4\} \\
&\text{ha} \\
&x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\
&x_1 + x_3 + 5x_4 = 1 \\
&x_2 \leq 0
\end{aligned}$$

Először átírjuk sztenderd alakba a feladatot. Mivel minimalizálunk, ezért csak $\geq$ ill $=$ típusú feltételeink lehetnek, azaz az utolsó feltétel $-x_2 \geq 0$ alakot ölt. Ezek után szamárvezetőt készítünk.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$y_1 \geq 0$	1	2	1	1	≥ 1
y_2	1	0	1	5	$= 1$
$y_3 \geq 0$	0	-1	0	0	≥ 0
	$=$	$=$	$=$	$=$	
	1	-2	0	1	

Az y_1, y_2, y_3 duális változók a három primálfeltételhez tartoznak. Mivel az első és a harmadik primálfeltétel egyenlőtlenség, ezért az y_1 és az y_3 változókra nemnegativitási feltétel van.

$$\begin{aligned}
&\max\{y_1 + y_2\} \\
&\text{ha } y_1, y_3 \geq 0 \\
&y_1 + y_2 = 1 \\
&2y_1 - y_3 = -2 \\
&y_1 + y_2 = 0 \\
&y_1 + 5y_2 = 1
\end{aligned}$$

Az x_i-k egyikére sincs nemnegativitás, ezért mind a négy hozzájuk tartozó duálfeltétel egyenlőséggel fog állni. A keresett DLP tehát odafenn a jobb oldalon látható.

Nem volt kérdés ugyan, de látszik, hogy a DLP-beli első és harmadik feltétel ellentmond egymásnak, ezért a DLP-nek nincs megoldása. Ennek megfelelően (szintén nem volt kérdés, de megfigyeljük), hogy az LP-ben a célfüggvényérték nem korlátos, azaz tetszőlegesen kicsi lehet, így minimum sem létezik.

---

6. (a) Mi a duálisa az alábbi lineáris programozási feladatnak?

   (b) Igaz-e, hogy a primál feladat célfüggvénye korlátos a megoldások halmazán?

$\max\{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4\}$
ha
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$
$x_2 + 2x_4 \leq 6$
$x_1 + x_3 + x_4 \leq 7$
$2x_2 + 3x_4 \leq 8$

(a) Szerencsére sztenderd alakban van az LP megadva, nem kell kínlódni az ilyen alakra hozással. Lássunk neki a szamárvezetőnek!

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline y_1 \geq 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \leq 5 \\ y_2 \geq 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \leq 6 \\ y_3 \geq 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \leq 7 \\ y_4 \geq 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & \leq 8 \\ \hline & = & = & = & = & \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{array}$$

Csak egyenlőtlenségek vannak, ezért minden duálváltozó nemnegatív, az x-ekre viszont nincs előjelmegkötés, ezért minden duálfeltétel egyenlőség. Jobbra látható a duális

$\min\{5y_1 + 6y_2 + 7y_3 + 8y_4\}$
ha $y_1, y_3, y_3, y_4 \geq 0$
$y_1 + y_3 = 2$
$2y_1 + y_2 + 2y_4 = -3$
$y_1 + y_3 = 4$
$2y_2 + y_3 + 3y_4 = 5$

(b) A dualitástétel szerint primál célfüggvény pontosan akkor korlátos a megoldások halmazán, ha a DLP megoldható. Márpedig az első és a harmadik duálfeltétel ellentmond egymásnak Ezért a DLP-nek nincs megoldása, vagyis az LP célfüggvényérték nem korlátos.

---

7. (a) Mi a duálisa az alábbi LP feladatnak?

   (b) Mutassuk meg, hogy az $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ a primál feladat egy optimális megoldása, míg az $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$, $y_4 = 0$ a duál feladat egy optimális megoldása!

$\max\{17x_1 + 17x_2 + 17x_3\}$
ha
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3$
$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$
$2x_1 + 5x_2 \leq 2$

(a) Ismét szerencsések vagyunk a sztenderd alakkal, veselkedjünk neki a szamárvezetőnek!

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline y_1 \geq 0 & 1 & 2 & 3 & \leq 1 \\ y_2 \geq 0 & 2 & 3 & 1 & \leq 3 \\ y_3 \geq 0 & 3 & 1 & 1 & \leq 8 \\ y_4 \geq 0 & 0 & 2 & 5 & \leq 2 \\ \hline & = & = & = & \\ & 17 & 17 & 17 & \end{array}$$

Csak egyenlőtlenségek vannak, ezért minden duálváltozó nemnegatív, az x-ekre viszont nincs előjelmegkötés, ezért minden duálfeltétel egyenlőség. Jobbra látható a duális

$\min\{y_1 + 3y_2 + 8y_3 + 2y_4\}$
ha $y_1, y_3, y_3, y_4 \geq 0$
$y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 17$
$2y_1 + 3y_2 + y_3 + 2y_4 = 17$
$3y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4 = 17$

(b) Könnyen ellenőrizhető, hogy az LP ill. a DLP egy-egy megoldásáról beszélünk, azaz mind az LP, mind a DLP-ben szereplő feltételek teljesülnek az két értékadásra. Számítsuk ki a megfelelő célfüggvényértékeket is: $17 \cdot 3 + 17 \cdot (-1) + 17 \cdot 0 = 34 = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 0$. Tudjuk, hogy ha az LP egy maximalizálás, akkor bármely LP megoldás célfüggvényértéke legfeljebb annyi mint bármely DLP megoldás célfüggvényértéke. Tehát bármely DLP célfüggvényérték legalább 34 az LP megoldás alapján, és bármely LP célfüggvényérték legfeljebb 34 a DLP megoldás miatt. Ezért a megadott LP megoldás maximalizálja az LP célfüggvényét, és a közölt DLP megoldás pedig minimalizálja a DLP-ét. Más szóval: optimális megoldásokról van szó.

---

8. (a) Írjuk fel az alábbi (n változós) lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis ne mátrixos alakot használjunk.)

   (b) Igaz-e, hogy az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ választással a primál feladat optimális megoldását adtuk meg?

$\max\{nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n\}$
ha
$x_1 \leq 1$
$x_1 + x_2 \leq 2$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$
$\vdots$
$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n$
$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

(a) Advanced level: nem egy konkrét mátrixról van szó. Sebaj, rajzoljuk csak fel a szamárvezetőt.

$$\begin{array}{cccccc}
 & x_1 \geq 0 & \ldots & x_n \geq 0 & \\
y_1 \geq 0 & 1 & 0 & 0 & \leq 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\
y_n \geq 0 & 1 & \ldots & 1 & \leq n \\
 & \geq & \ldots & \geq & \\
 & n & \ldots & 1 &
\end{array}$$

Csak egyenlőtlenségek vannak, ezért minden duálváltozó nemnegatív. Az x-ek nemnegatívak, ezért minden duálfeltétel egyenlőtlenség. Jobbra látható a duális.

$\min\{y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n\}$
ha $y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$
$y_1 + y_2 \ldots + y_n \geq n$
$\vdots$
$y_1 + y_2 \geq 2$
$y_1 \geq 1$

(b) Az $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ megoldása az LP-nek, és a hozzá tartozó célfüggvényérték $n + (n-1) + \ldots + 1 = \binom{n+1}{2}$. Vegyük észre, hogy az $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$ pedig a DLP megoldása, és a hozzá tartozó célfv érték $1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2}$. Mivel a két célfüggvényérték megegyezik, ezért az előző feladatban kifejtett gondolatmenet miatt mindkét megoldás optimális az adott problémára.

Kombinatorikus optimalizálás 2023. tavasz

6. gyakorlat 2023. április 13.

1. Egy $G = (V, E)$ gráf 2-*faktora* alatt az E egy olyan F részhalmazát értjük, amelyre G minden csúcsából pontosan két F-beli él indul. Tegyük fel, hogy G páros gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ adott súlyfüggvény. Fogalmazzuk meg a maximális súlyú 2-faktor keresésének problémáját IP feladatként. Igaz-e, hogy a megfelelő LP feladatnak mindig van egész optimuma, azaz az IP optimuma egyúttal optimuma az LP-nek is? Írjuk fel az LP duálisát.

Minden e élhez egy-egy $x(e)$ változó fog tartozni, és olyan IP-t szeretnénk felírni, aminek a megoldásai kizárólag a 2-faktorok karakterisztikus vektorai lesznek. (Egy 2-faktor karakterisztikus vektora egy élen annak megfelelően vesz fel 1 ill. 0 értéket, hogy az adott él hozzátartozik-e a 2-faktorhoz vagy sem.)

Nekünk a karakterisztikus vektorával megadott 2-faktor éleinek összsúlyát kell maximalizálni. Itt látszik a karakterisztikus vektor egy előnye: az összsúly felírható $\sum_{e \in E(G)} c(e) \cdot x(e)$ alakban, ugyanis ha $x(e) = 0$, akkor az e él súlya nem szerepel az összegben, ha pedig $x(e) = 1$, akkor az e él hozzájárulása éppen $c(e)$. A célfüggvény tehát megvan, keressük meg az IP feltételeket. Kezdjük a karakterisztikus vektor tulajdonság megkövetelésével: megkívánjuk minden e élre az $x(e) \geq 0$ nemnegativitási és az $x(e) \leq 1$ lineáris feltételeket, valamint az $x(e) \in \mathbb{Z}$ egészértékűségi feltételt. E három feltételt minden $x(e)$-re megkövetelve elértük, hogy a megoldás csakis egy élhalmaz karakterisztikus vektora lehet.

A 2-faktor tulajdonság minden v csúcsra megkívánja, hogy *pontosan* két él induljon v-ből, és ezt könnyű lineáris feltétellé átfogalmazni: a $\tilde{x}(E(v)) = 2$ egyenlőségnek kell teljesülnie minden $v \in V$ esetén.

Világos, hogy tetszőleges 2-faktor karakterisztikus vektora teljesít minden fenti feltételt. Fordítva, ha az $x(e)$ változók teljesítik a fenti feltételeket, akkor minden $x(e)$ értéknek 0-nak vegy 1-nek kell lennie, és minden csúcsból pontosan két olyan élnek kell kiindulnia, amelyikhez tartozó x változó értéke 1. Ez pontosan azt jelenti, hogy x egy 2-faktor karakterisztikus vektora.

A feladat második kérdéséhez azt figyeljük meg, hogy miféle mátrix írja le a fenti IP feladatot. Az $x(e) \leq 1$ felső korlátokért egy egységmátrix felel, a 2 jobboldalú egyenlőtlenségekhez pedig epp a G illeszkedési mátrixa tartozik. (Ennek azért érdemes utánagondolni.) Mivel a páros gráf illeszkedési mátrixa TU, és ezt egységvektor-sorokkal bővítettük, az IP probléma mátrixa TU tulajdonságú. (Ha G nem lenne páros, akkor ez nem lenne igaz, ahogy a gondolatmenet további része sem állna.) Ráadásul a jobboldalon álló konstansok is egészek, ezért a TU mátrixokról tanultak miatt az egészértékűségről szóló kikötések elhagyásával keletkező LP probléma (az ún. LP-relaxáció) azzal a tulajdonsággal rendelkezik hogy az LP optimális megoldásai között van olyan is, amelyikben minden változó egész értéket vesz fel.

Az LP duálisá felírásához megint szamárvezetőt rajzolunk.

		E: $x_1 \geq 0 \quad \ldots \quad x_n \geq 0$	
E	$y \geq 0$	I	≤ 1
V	z	$B(G)$	$= 2$
		$\geq$ c	

Az éleknek megfelelő egyenlőtlenségeknek a nemnegatív y változók, a csúcsokhoz tartozó egyenlőségeknek az előjelkötetlen z-k felelnek meg. Az x-ek nemnegatívak, ezért a duálfeltételek egyenlőtlenségek.

$\min\{\tilde{y}(E) + 2 \cdot \tilde{z}(V)\}$
ha $y \geq 0$
$y(e) + z(u) + z(v) \geq c(e)$
minden $e = uv$ élre

---

2. Adott $G = (V, E)$ gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén fogalmazzuk meg a maximális súlyú párosításfeladatot IP feladatként. Igaz-e, hogy tetszőleges G gráfra az IP optimális megoldása egyúttal a megfelelő LP relaxációnak is optimuma?

Ismét az élekhez fognak tartozni az $x(e)$ változók, és olyan lineáris feltételeket keresünk, amelyek az egészértékűségi megkötésekkel együtt pontosan a G-beli párosítások karakterisztikus vektorait írják le. Ha ez sikerül, akkor a célfüggvény $\max cx = \max \sum\{c(e)x(e) : e \in e(G)\}$ lesz. Legyen minden $x(e)$-re kikötve az egészértékűség. Ezen kívül világos, hogy $0 \leq x(e) \leq 1$ áll minden e élre. Végül minden v csúcsra megkívánjuk, hogy *legfeljebb* egy él induljon belőle: $\tilde{x}(E(v)) \leq 1$.

Világos, hogy tetszőleges párosítás karakterisztikus vektora teljesít minden fenti feltételt. Fordítva, ha az $x(e)$ változók teljesítik a fenti feltételeket, akkor minden $x(e)$ értéknek 0-nak vegy 1-nek kell lennie, és minden csúcsból legfeljebb egy olyan élnek indulhat, amelyikhez tartozó x változó értéke 1. Ez pontosan azt jelenti, hogy x egy párosítás karakterisztikus vektora.

Ha G nem páros gráf, akkor $B(G)$ nem feltétlenül lesz TU tulajdonságú, így a felírásban szereplő mátrix sem. Ezért nem várhatjuk, hogy az LP-relaxációnak (vagyis az IP feladat egészértékűségi megkötések nélküli LP változatának) automatikusan legyen egész optimuma, vagyis olyan optimális megoldása, amelyikben minden változó egész.

Egyértelmű válasz azonban a feladat második kérdésére úgy adható, hogy egy konkrét gráfot mutatunk, amelyikre nincs a fenti LP-nek egész optimuma. Ennek a gráfnak persze nem szabad párosnak lennie, vegyük a például a 3 hosszú kört. Vegyük még mellé az $\mathbb{1}$ célfüggvényt, azaz minden él súlya 1. Ekkor a maximális súlyú párosítás maximális *méretűt* jelent, így az IP-re az optimum értéke 1, hisz legfeljebb 1 él van a C_3 egy párosításában. Az LP relaxáció azonban tud ennél többet is: ha mindhárom e élre $x(e) = \frac{1}{2}$, akkor így az LP egy megoldását kapjuk, amire a $\frac{3}{2}$ célfüggvényérték több, mint az LP optimális értéke. Ennek megfelelően az LP-nek itt nincs olyan optimuma, ami minden változóhoz egész értéket rendel.

---

3. Adott $G = (V, E)$ gráf esetén írjuk fel IP feladatként a G-beli maximális méretű klikk méretének, azaz $\omega(G)$-nek ill. a maximális méretű független ponthalmaz méretének, azaz $\alpha(G)$-nek a meghatározását.

Ismét karakterisztikus vektor formájában keressük a megoldást, de most a csúcsokhoz fogunk változókat rendelni: $x(v)$ akkor lesz 1, ha v benne van a megoldás klikkben. A célfüggvény tehát $\max \tilde{x}(V) = \max \mathbb{1} \cdot x$, és persze $0 \leq x(v) \leq 1$ teljesül minden v csúcsra. Ha még minden $x(v)$-re egészértékűségi megkötést is teszünk, akkor az eddigi feltételeket pontosan a V részhalmazainak a karakterisztikus vektorai teljesítik. Azt kell még lineáris feltételekkel megfogalmazni hogy ha a megoldás mondjuk az U részhalmaz karakterisztikus vektora, akkor U bármely két csúcsa szomszédos G-ben. Ezt pl. úgy tudjuk megtenni, ha azt kívánjuk meg, hogy amennyiben G két csúcsa között nem fut él, akkor a két csúcs nem lehet egyszerre U-beli: $x(u) + x(v) \leq 1$ teljesül bármely u, v nem szomszédos pontjaira G-nek.

Ezek tehát a feltételek. Világos, hogy G bármely klikkjének karakterisztikus vektora kielégíti ezeket a feltételeket, továbbá ha egy vektor ezteket kielégíti, akkor az egy olyan U részhalmaz karakterisztikus vektora, amely nem tartalmazza G két nem szomszédos csúcsát. Tehát U csakugyan klikk, sikerült megfelelő IP-t felírni.

A maximális független ponthalmaz voltaképp a komplementergráf klikkje. Ezért minden szó szerint működik az előző megoldásból azzal, hogy az utolsó feltétel megváltozik: nem azt kívánjuk, hogy bármely két nem szomszédos csúcs közül legfeljebb egy tartozhat a szóban forgó U halmazhoz, hanem azt, hogy bármely két *szomszédos* csúcsra legyen ez így: $x(u) + x(v) \leq 1$ teljesül G bármely uv élére.

---

4. A Guváti vállalatnál piros és zöld bigyókat gyártanak. A gyártástechnológiából adódóan havonta összesen legfeljebb 200 bigyót tudnak legyártani, és bármelyik fajta bigyóból legfeljebb 100-zal gyárthatnak többet, mint a másik fajtából. A gyár márciusban 130 piros és 70 zöld bigyót gyártott. Határozzuk meg, mennyi lehet a zöld bigyó a-val jelölt ára, ha tudjuk, hogy a piros bigyót 42 forintért árulják és a vállalat a márciusi termelésével a lehető legtöbb bevételt érte el a fenti feltételek mellett. (Talán érdemes lenne felírni egy LP feladatot.)

LP feladatként fogalmazzuk meg az egy hónapban legyártott termékekből származó bevétel optimalizálását.

Jelölje p és z az egy hónapban legyártott piros ill. zöld bigyók számát. A bevétel optimalizálásához a $42p + az$ mennyiséget kell maximalizálni. (1 pont)
A feladatban szereplő feltételek szerint $p, z \geq 0$, (1 pont)
az összmennyiségre kapott korlátból $p + z \leq 200$, (1 pont)
ill. a piros és zöld bigyók számának eltérésére adott feltételből $p - z \leq 100$ és $-p + z \leq 100$ adódik. (2 pont)
A pz-síkon ábrázolva a megoldások egy olyan konvex ötszügtartományt alkotnak, aminek a csúcsai $(0, 0)$, $(100, 0)$, $(150, 50)$, $(50, 150)$, $(0, 100)$. (2 pont)
A márciusi gyártáshoz tartozó $(170, 30)$ megoldás a fenti ötszögtartomány egy oldalára esik, mégpedig arra, aminek a két végpontja $(150, 50)$ és $(50, 150)$. Egy $(42, a)$ normálvektorú egyenes tehát a $(130, 70)$ pontban támasztja az ötszöget. Mivel az ötszög egy oldalának belsejében vagyunk, a támaszegyenes csakis az adott oldalegyenes lehet, aminek normálvektora $(1, 1)$, így a támaszegyenes normálvektorára $(42, a) = \lambda(1, 1)$ teljesül. Innen $a = 42$ az egyedül lehetséges megoldás. (3 pont)

A legutolsó rész indokolható másképp is.

Az órán tanultuk, hogy az optimum valamelyik csúcspontban is felvétetik. (1 pont)
Ezt felírva az adott ötszögoldal két csúcsára adódik, hogy $50 \cdot 42 + 150 \cdot a \leq 130 \cdot 42 + 70 \cdot a$ ill. $150 \cdot 42 + 50 \cdot a \leq 70 \cdot 42 + 130 \cdot a$. Az első egyenlőtlenségből $a \leq 42$, a másodikból pedig $a \geq 42$ következik, így $a = 42$ az egyedül lehetséges megoldás. (2 pont)

5. Piréziában besúgóhálózatot építenek ki a megbízhatónak gondolt célszemélyek beszervezésével. A cél, hogy minden város lakosai között legyen legalább 66 ügynök, ám nem dolgozhat a hálózatban 3-nál több tagja egyetlen családnak sem. Mindezt a lehető legkisebb hálózat kiépítésével szeretnék elérni.

   Írjunk fel egy olyan LP vagy IP feladatot, aminek a megoldásával meghatározható, kiket kell beszervezni a cél elérése érdekében: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris, és esetleges nemnegativitási ill. egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt.

Vezessünk be minden potenciális ügynökhöz egy-egy változót, az $x(p)$ a p személyhez tartozó változó. A beszervezendó emberek halmazának karakterisztikus vektoraként szeretnénk megtalálni a megoldást, ehhez keressük a célfüggvényt és a feltételeket. (2 pont)
Egy ilyen karakterisztikus vektorhoz könnyű meghatározni a célfüggvényt: az összes változó összegét, azaz az $\tilde{x}(P)$ mennyiséget akarjuk minimalizálni, ahol P jelöli Pirézia beszervezhető lakóinak halmazát. (2 pont)
A tanult módon érjük el, hogy karakterisztikus vektorral dolgozzunk: minden $x(p)$ váltózóhoz tartozik a $0 \leq x(p)$ nemnegativitási és az $x(p) \leq 1$ lineáris feltétel, valamint egy egészértékűségi megkötés. (2 pont)
A 66 városi ügynökre vonatkozó kritérium is lefordítható lineáris feltételre. Minden V városhoz tartozik egy feltétel, nevezetesen, hogy a V lakosaihoz tartozó változók összegének legalább 66: $\tilde{x}(V) \geq 66$. (2 pont)
Ezen kívül minden C családhoz is tartozik egy feltétel, nevezetesen, hogy a C család tagjaihoz tartozó változók összege legfeljebb 3: $\tilde{x}(C) \leq 3$. A kapott ILP megoldásai a feltételeknek megfelelő beszervezések, a célfüggvényt optimalizáló egész megoldás pedig megadja, hogy konkrétan kik a beszervezési kampány célszemélyei.(2 pont)

---

6. A piréz labdarúgó bajnokságban minden csapat minden másik csapattal egyszer játszik. Tegyük fel továbbá, hogy a bajnokság végeztével sikerült a csapatokat úgy jutalmazni, hogy ha az i csapat legyőzte a j csapatot, akkor a $p(i) - p(j)$ különbség $10^6 \cdot a(i,j)$ és $10^6 \cdot b(i,j)$ PP (piréz peták) közé essék, ahol $p(v)$ a v csapat jutalmát jelöli, valamint $a(i,j) \leq b(i,j)$ egész számok.

   Igaz-e, hogy a jutalmazás megvalósítható ekkor úgy is, hogy a fenti feltételek továbbra is teljesüljenek, ám minden csapat egymillió PP többszörösét kapja, ráadásul a szétosztott jutalom összege ne növekedjék ettől?

   (Célszerűnek látszik felírni egy, a feladathoz kapcsolódó LP problémát.)

Vezessünk be minden csapathoz egy-egy változót: az i csapathoz tartozzék az $x(i)$. Tekintsük azt a lineáris programozási feladatot, amelyben az $x(1) + x(2) + \ldots$ összeget kell maximalizálni, az alábbi feltételek mellett. Minden i-re teljesül, hogy egyrészt $x(i) \geq 0$, másrészt $a(i,j) \leq x(i) - x(j) \leq b(i,j)$ teljesül minden olyan esetben, amikor az i csapat legyőzte a j csapatot. (2 pont)
A feladat szövege alapján a fenti LP probléma megoldható, hisz az $x(i) = p(i)/10^6$ választással a feltételeket kielégítő megoldást kapunk (ami persze nem feltétlenül optimális). (2 pont)
Közelebbről megnézve az adódik, hogy az LP problémához tartozó mátrix két részből áll: az irányított G gráf incidenciamátrixának transzponáltjából ill. ezen transzponált (-1)-szereséből, ahol a G gráf csúcsai a csapatok, és élei pedig a nem döntetlenre végződő mérkőzésekhez tartoznak: az i csapatból a j csapatba akkor fut irányított él, ha az i csapat legyőzte a j csapatot. (2 pont)
A tanultak szerint a szóban forgó mátrix TU tulajdonságú. (2 pont)
Ezért ha a célfüggvényérték alulról korlátos, akkor az optimális megoldások között van olyan is, amelyik esetén minden $x(i)$ változó egész értéket vesz fel. (1 pont)
A nemnegativitási feltételek miatt a célfüggvényérték mindig nemnegatív, így a célfüggvényérték csakugyan alulról korlátos. Ezért a felírt LP-nek van egész optimuma, és az ezen optimális megoldásban szereplő változók egymilliószorosai olyan jutalmazást írnak le, ami teljesíti a feladatban megkívánt feltételeket. (1 pont)

---

7. A korona elleni küzdelemben szerzett múlhatatlan éredemei elismeréseként Pirézia elnökének tiszteletére az ország n focicsapata között szeretnénk egy időben a lehető legtöbb mérkőzést megszervezni. Figyelembe kell azonban venni, hogy a helyi szabályok minden piréz megyére meghatározzák, hogy egy időben hány csapat mérkőzhet az adott megyén kívüli csapattal. (Egy M megye esetén $c(M)$ jelöli ezt a felső korlátot.) További feltétel, hogy a lejátszott

mérkőzések legalább a felében két olyan csapatnak kell egymással játszania, amelyek azonos bajnokságban játszanak.

Írjunk fel egy olyan IP problémát, ami a fenti feladatot oldja meg: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris és esetleges egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt.

Vezessünk be az $\binom{n}{2}$ lehetséges mérkőzés mindegyikéhez egy-egy változót: az i és j csapatok által lejátszott (vagy le nem játszott) meccsehez tartozzék az $x(ij)$. (Az $x(ij)$ változót hivatkozhatjuk $x(ji)$-ként is, vagyis e két változó ugyanaz.) A lejátszott meccsek karakterisztikus vektorához keresünk leíró feltételeket. (2 pont)
Ha egy ilyen karakterisztikus vektorral dolgozunk, akkor a célfüggvény (ami a lejátszott meccsek száma) könnyen felírható: $\max \sum_{\forall i,j} x(ij)$. (1 pont)
A tanult módon érjük el, hogy karakterisztikus vektorral dolgozzunk: minden $x(ij)$ váltózóhoz tartozik a $0 \leq x(ij) \leq 1$ lineáris feltétel és egy egészértékűségi megkötés. (1 pont)
Egy időben egy csapat csak egy mérkőzést játszhat, ezért minden i csapat esetén a $\sum_j x(ij) \leq 1$ feltételnek kell teljesülnie. Ha minden ilyen feltétel teljesül, akkor a meccsek karakterisztikus vektora valóban egyszerre lejátszható meccsekhez tartozik. (1 pont)
A megyékre vonatkozó szabály is lineáris feltételnek felel meg: minden M megyére megkívánjuk, hogy $\sum\{x(ij) : i \in M \not\ni j\} \leq c(M)$ (2 pont)
Végül arra kell lineáris feltételt felírnunk, hogy a meccseknek legalább felét azonos bajnokságban játszó csapatok játsszák. Ez azzal ekvivalens, hogy legalább annyi meccset játszanak azonos bajnokságban szereplő csapatok, mint amennyit különböző bajnokságban szereplők játszanak. Jelölje U az azonos bajnokságban szereplő csapatok közti (lehetséges) meccsek a halmazát, V pedig azon (lehetséges) meccsekét, amelyben különböző bajnokságban szereplő csapatok az ellenfelek. A szóban forgó feltétel ekkor éppen az $\tilde{x}(U) \geq \tilde{x}(V)$ egyenlőtlenség teljesülésével egyenértékű. (2 pont)
Mivel minden kívánalmat sikerült átfogalmaznunk IP terminológiára, a fenti feltételek és céfüggvény pontosan a vizsgált problémát írják le. (1 pont)

---

8. Piréziában az emberek kétfélék: minden polgár vagy oltásszkeptikus vagy oltáshívő. A kormány az átoltottság mihamarabbi elérésének érdekében úgy szeretné levezényelni az oltáskampányt, hogy minden oltásszkeptikusnak legalább 13 oltáshívő facebook-ismerősét beoltsák. (Az oltásszkeptikusok rendkívül aktívak a szociális médiában, mindegyiküknek száz feletti fb-ismerőse van, ezek legalább fele oltáshívő.) Sajnos az oltóanyag csak szűkösen áll rendelkezésre.

   Írjunk fel egy olyan LP vagy IP feladatot, aminek a megoldásával meghatározható, hogyan lehet minimális számú ember beoltásával elérni a kitűzött célt: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris, és esetleges nemnegativitási ill. egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt.

   (A kormány természetesen mindenkiről tudja, melyik csoportba tartozik és kik is a fb-ismerősei.)

Vezessünk be minden potenciális oltakozóhoz egy-egy változót, az $x(v)$ a v személyhez tartozó változó. A beoltandó emberek halmazának karakterisztikus vektoraként szeretnénk megtalálni a megoldást, ehhez keressük a célfüggvényt és a feltételeket. (2 pont)
Egy ilyen karakterisztikus vektorhoz könnyű meghatározni a célfüggvényt: az összes változó összegét, azaz az $\tilde{x}(V)$ mennyiséget akarjuk minimalizálni, ahol V jelöli Pirézia beoltható lakóinak halmazát. (2 pont)
A tanult módon érjük el, hogy karakterisztikus vektorral dolgozzunk: minden $x(v)$ váltózóhoz tartozik a $0 \leq x(v)$ nemnegativitási és az $x(v) \leq 1$ lineáris feltétel, valamint egy egészértékűségi megkötés. (2 pont)
A 13 beoltott facebook ismerősre vonatkozó kritérium is lefordítható lineáris feltételre. Minden oltásszkeptikus lakoshoz (hívjuk v-nek) tartozik egy feltétel, nevezetesen, hogy a v facebook oltáshívő ismerőseihez tartozó változók összegének legalább 13-nak kell lennie. (3 pont)
Ha ezt formalizálni akarjuk, akkor pl bevezethetjük a $G = (V, E)$ gráfot, amelynek csúcshalmaza $V = V_1 \cup V_2$, ahol V_1 az oltásszkeptikus, V_2 pedig az oltáshívő lakosok halmaza, az E élhalmaz élei pedig az oltásszkeptikus lakosokat kötik össze az oltáshívő facebook-ismerőseikkel. Ebben az esetben az IP feladatban szereplő lineáris feltétel az lesz, hogy $\tilde{x}(E(v)) \geq 13$ teljesül a G gráf minden $v \in V_1$ csúcsára. Az így kapott ILP probléma éppen a kitűzött feladatot fogalmazza meg. (1 pont)
