

Algoritmikus kérdések WDM hálózatokban

Fogaras Dániel
Diplomaterv
2000. május

Konzulens:

Dr. Friedl Katalin
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Technikai háttér	4
2.1. Optikai hálózatok architektúrája	5
2.2. A konfiguráció alapproblémája	7
2.3. Az alapprobléma változatai	8
3. Alapfogalmak	10
3.1. Definíciók, jelölések	10
3.2. Alapvető összefüggések	13
3.3. Speciális esetek rendszerezése	15
3.3.1. Kérdésfelvetés	15
3.3.2. Hullámhosszak száma	17
3.3.3. Irányítottság	17
3.3.4. Igényhalmazok	18
3.3.5. Hálózati topológiák	18
4. Láncok	20
4.1. Optimális színezés	20
4.2. Maximális értékű átvitel	21
4.3. Összefoglalás	24
5. Csillagok	25
5.1. Az útszínezés kapcsolata az élszínezéssel	25
5.2. Útszínezés az irányítatlan esetben	28
5.2.1. Az optimális színezés	28
5.2.2. Legrosszabb esetben optimális színezés	29
5.3. All-to-all kommunikáció az irányítatlan esetben	30
5.3.1. Optimális színezés	30
5.3.2. Maximális átvitel	31
5.3.3. Maximális értékű átvitel	32
5.4. Útszínezés az irányított esetben	33
5.4.1. Optimális színezés	33
5.4.2. Maximális értékű átvitel	34
5.5. Összefoglalás	35

6. Fák	36
6.1. Irányítatlan eset	36
6.1.1. Szoros kapcsolat a csillagokkal	36
6.1.2. Optimális színezés	37
6.1.3. All-to-all kommunikáció	38
6.2. Irányított eset	39
6.2.1. Az optimális színezés bonyolultsága	40
6.2.2. Az optimálist közelítő színezés	43
6.2.3. Legrosszabb esetben optimális színezés	45
6.2.4. All-to-all kommunikáció	46
6.3. Maximális és maximális értékű átvitel	50
6.4. Speciális szerkezetű fák és igényhalmazok	51
6.4.1. Korlátos fokszámú fák	51
6.4.2. Konstans átmérőjű fák	52
6.4.3. Irányított és irányítatlan fák szintézise	56
6.5. Összefoglalás	60
7. Perfekt gráfok	62
7.1. Elméleti háttér	62
7.1.1. Nevezetes perfekt és nem perfekt gráfok	63
7.1.2. Klikkseparatorok	64
7.2. A maximális terhelés és a maximális klikkméret	66
7.3. Erős perfekt gráf sejtés irányítatlan fák konfliktus gráfjaira . .	69
7.4. Erős perfekt gráf sejtés élgráfokra	71
8. Bővebb gráfosztályok	77
8.1. Konfigurálás egy színnel	77
8.2. Rögzített hálózatok	78
8.3. One-to-all kommunikáció	79
9. Megoldatlan problémák	83

1. Bevezetés

A diplomaterv egy napjainkban megjelenőben lévő, ígéretes hálózati elemmel a tisztán optikai hálózati réteggel foglalkozik. Az optikai hálózatokban felmerülő konfigurálási probléma számos új kérdést vet fel, amely a matematikusokat és a mérnököket egyaránt kihívások elé állítja. Az elméleti és gyakorlati megközelítésmód céljai és eszközei nagyban eltérnek egymástól. Az előbbinél elsődleges szempont a formális bizonyíthatóság, ennek érdekében a feladat a gyakorlat számára gyakran érdektelenné egyszerűsödik. A gyakorlati megközelítésmód esetén a technikai és üzemeltetési szempontok (pl. védelem) mellett megjelenik a gazdaságosság kérdése is (pl. a már meglévő infrastruktúra hatékony kiaknázása). A diplomamunka az elméleti oldalhoz tartozik, de rendszeresen utalunk a gyakorlat számára is hasznos szempontokra.

Az optikai hálózatok konfigurálása sok kérdést fogalmaz meg az algoritmus gráfelmélet számára. A konfigurálás célja valamely igények egy halmazának kielégítése, mely útvonalak megválasztásából és azok színezéséből áll. Az útelvezetési feladat emlékeztet a hosszú ideje vizsgált többtermékes folyam problémára, azonban az útszínezés egy új témakör. Különösen nehezen kezelhetőnek tűnik a feladatban, hogy az útelvezetést és útszínezést egyidejűleg kellene megoldani egyetlen cél, a felhasznált színek számának minimalizálása érdekében.

A 2. fejezetben ismertetjük, hogy milyen hálózatok és üzemeltetési szempontok esetén merül fel az általunk vizsgált optimalizálási feladat. Utána a 3. fejezetben formálisan is bevezetjük a legfontosabb fogalmakat, jelöléseket és a konfigurálási problémát. Az irodalomban megjelent legtöbb mű a konfigurálási problémának csak speciális eseteit vizsgálja. A bevezető szakaszban a speciális esetek egy új rendszerezését ismertetjük, melybe jól beilleszthetők az eddig nyert legfontosabb eredmények. A rendszerezés nyílt, azaz az egyes szempontokhoz újabb esetek hozzávehetőek. Több új esetet ismertetünk, melyek közül a maximális átvitel ill. a maximális értékű átvitel problémákat tartjuk a legfontosabbnak.

A rendszerezés egyik fontos szempontja a hálózat topológiája. E mentén tagoltuk a dolgozatot fejezetekre. A 4., 5., és 6. fejezetekben lánc, csillag és fa alakú hálózatokra részletesen vizsgáljuk a rendszerezésben felvetett kérdések közül: az optimális, legrosszabb esetben optimális színezéseket, a maximális átvitel és maximális értékű átvitel problémákat tetszőleges igényhalmazon és az all-to-all kommunikáció mellett. A fejezetek végén a kapott eredményeket

egy-egy táblázatban összegezzük a rendszerezési szempontoknak megfelelően. A fákról szóló fejezet végén néhány olyan ötletet is tárgyalunk, melyek segítségével az útszínezési probléma hatékonyan megoldható.

A 7. fejezetben mélyebb betekintést engedünk a láncokról, csillagokról és fákról szóló fejezetek színezési eredményei mögött meghúzódó fontosabb gráfelméleti fogalmakba és eredményekbe. Az általánosabb megközelítés segítségével újabb színezési eljárások is nyerhetők.

Az utolsó, 8. fejezetben általános topológiájú gráfokkal foglalkozunk, a fejezet egyes szakaszaiban a paraméterek rögzítésére mutatunk példákat.

A diplomaterv irodalomkutatási szempontból azért jelentős, mert a témában még nem publikáltak részletes összefoglaló művet. Megkíséreltük a szerteágazó irodalom definícióit és jelöléseit egységesíteni, és a legfontosabb eddig nyert eredményeket összefoglalni. Úgy gondoljuk, hogy a fákról szóló fejezetekben ez sikerült is, az itt közölt eredmények jól áttekintik a fa alakú, tisztán optikai hálózatokban felmerülő statikus konfigurálási problémáról megjelent teljes irodalmat. Az utolsó fejezetben nem törekedtünk teljességre, és meg kell említenünk, hogy a gyűrűkön, hiperkockákon és toroidokon felmerülő konfigurálási problémákat nem tárgyaljuk, pedig ezekről is sok fontos eredmény jelent meg a közelmúltban.

A dolgozat a kombinatorika és gráfelmélet sok eszközére mutat alkalmazási lehetőséget. Az egészértékű folyamok, teljes párosítások (páros és tetszőleges gráfban), perfektn gráfok, matroidmetszet algoritmus, egészértékű lineáris programozás, dinamikus programozás, PERT-módszer, mátrixok totális unimoduláris tulajdonsága mellett több nevezetes NP-teljes problémára (élszínezés, éldiszjunkt utak) mutatunk visszavezetést, továbbá példákat ismertetünk a bemeneti paraméterek rögzítésével nyert polinom idejű eljárásokra.

Végül, de nem utolsósorban hangsúlyozzuk, hogy a műben több új kutatási eredményt is ismertetünk. A diplomamunka megírását másfél éves kutatói munka előzte meg az „Önálló laboratórium” és „Diplomatervezés” c. tárgyak keretében, melyet Friedl Katalin vezetésével Marx Dániel évfolyamtársammal közösen végeztünk a Számítástudományi és Információelmélet Tanszéken. A dolgozat közvetlen előzménye az 1999. évi Tudományos Diákköri Konferencián való közös részvételünk volt [10].

Az egyes fejezetek ill. szakaszok bevezetésében részletesen ismertetjük, hogy melyek *közös* és melyek *saját* eredmények. Ezt röviden itt is áttekintjük. A maximális átvitel és maximális értékű átvitel Marx D. által javasolt kérdések, az ezekre adott válaszok mind új eredmények. Ezek közül a lán-

cokról itt közölt eredmény közös, valamint az irányított csillagok esetében a súlyozott matroid metszet algoritmus használata és az irányítatlan csillagoknál az all-to-all igényhalmaznál a maximális átvitel probléma megoldása saját eredmény. A jól irányítható fáknál több saját állítást mutatunk, továbbá a 3-átmérőjű fák kérdése egy saját kérdésfelvetés, az általánosnál jobb közelítő eredményekkel. A perfekt gráfokról szóló fejezetben már korábban felfedezett állításokat igazolunk. A fejezet érdekessége, hogy az itt közölt bizonyítások eltérnek a témában alapműnek számító cikk érvelésétől, továbbá a bizonyítások egyszerű polinom idejű algoritmusokat tartalmaznak. A fejezet végén szereplő állítást, mely szerint az élgráfok kielégítik az erős perfekt gráf sejtést többen, jóval általánosabb környezetben igazolták. Az itt közölt saját bizonyítás érdeme is az egyszerű és hatékony algoritmusban keresendő. Az utolsó fejezetben a rögzített hálózatokról szóló állítás közös, annak alkalmazása saját eredmény. A maximális átvitel ill. maximális értékű átvitel a one-to-all kommunikáció esetén saját eredmény, bár a bizonyítások alapötlete egy ismert cikkből származik.

2. Technikai háttér

Sokak szerint az embereket leginkább kommunikációra való képességük és igényük különbözteti meg a többi élőlénytől. A XX. század végére a kommunikációs lehetőségek ugrásszerűen megnöttek, a világ bármely két pontján lévő ember kapcsolatba tud lépni egymással pillanatok alatt, és a legtávolabbi információkhoz is könnyűszerrel hozzá lehet férni. Ez a változás az élet legtöbb területén érezteti hatását: a tudomány, az ipar, az oktatás, a gyógyászat és a szórakoztató ipar is igyekszik kihasználni az újabb és újabb kommunikációs lehetőségeket.

A távközlés fejlődése az elektromosság, a távíró, a rádiózás feltalálásával kezdődött. A számítógép feltalálása és rohamos elterjedése a távközlésben is óriási változást okozott. Egyrészt a digitális jelfeldolgozás rugalmasan kezelhető adatátvitelt tett lehetővé a számítástechnika segítségével. Másrészt a számítógépek hálózatba kötve maguk is a távközlés felhasználóivá váltak, újabb kihívások elé állítva az adatátviteli egységeket. A nagyobb teljesítményű gépeken összetettebb programok futnak, melyek egyre nagyobb sáv szélességet igényelnek az egymás közti kommunikációhoz.

A fejlődés napjainkban is folytatódik és feltehetőleg még jó ideig az üteme sem fog lassulni. Egyrészt megfigyelhető a tendencia, hogy igyekeznek a különböző adatátviteli feladatokat egységesen kezelni, ugyanakkor széles választékot nyújtani a szolgáltatások területén. A fejlődés másik fontos iránya olyan új technológiák kifejlesztése, melyek segítségével az átviteli kapacitás növelhető az integrált hálózatokban. Az új technológiák elterjedésének a már meglévő infrastruktúra szab gátat, rövid távon csak olyan ötleteknek van jövőjük, melyek jól illeszkednek a már meglévő hálózati elemekhez.

E diplomamunka témája is egy ilyen ígéretes, új hálózati elem, a kísérleti stádiumban lévő tisztán optikai hálózat, melynek széleskörű elterjedése a közeljövőben várható. Mint bármely új technológia megjelenésénél itt is számos új elméleti és gyakorlati probléma merül fel. Az elmélet és a gyakorlat kölcsönhatásban áll egymással, az újszerű problémák az elmélet eddig nem vizsgált területeire vezérlik a kutatókat, és az itt elért eredmények egy része a gyakorlatban is hasznosítható.

Ebben a műben elsősorban elméleti oldalról közelítjük meg az optikai hálózatoknál felmerülő konfigurálási problémát. Ez a hálózatelmélet egy teljesen új területe, a témában megjelent legrégebbi publikációk sem idősebbek öt-tíz évnél. Megvizsgáljuk az egyes problémák algoritmikus bonyolultságát, az esetek nagy részében a „polinom idejű” vagy „NP-nehéz” kérdésre

keressük a választ. Mind az NP-nehézség, mind a polinom idejűség bizonyítása hasznos lehet a gyakorlat számára, az előbbi közelítő algoritmusok vagy véletlent használó módszerek keresésére ösztönöz, az utóbbi már implementálható megoldást is tartalmazhat. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy az itt vizsgált feladatok a bizonyíthatóság és formális kezelhetőség végett a gyakorlatban felmerülő problémák jelentősen leegyszerűsített változatai. Reméljük, hogy a jóval összetettebb valós problémák megoldásának az itteni eredmények építőkövei lehetnek.

2.1. Optikai hálózatok architektúrája

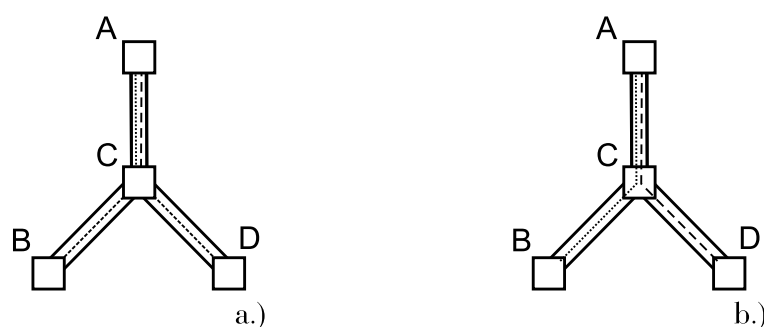
Vezetékes átvitel esetén a hordozó közegben nagyfrekvenciás vivő jelet generálnak, melyre valamilyen modulációs eljárás segítségével egy adat jelet ültetnek rá. Az átviteli sebességet a vivő jel frekvenciája határozza meg, amit az átviteli közeg sajátosságai korlátoznak. Például rézalapú átvitelnél (koax, sodort érpár) nagyobb frekvencia esetén megnő a csillapítás és az áthallás. Ezek a problémák egy határig orvosolhatóak erősítők és jelismétlők beiktatásával, azonban a néhány száz megahertz-et így sem sikerült túlhaladni.

A 1980-as években jelent meg az *optika alapú átvitel*, melyben a jelet egy lézerdiódával generálják, majd fényvezető kábelben továbbítják. Ezzel az eljárással az átvitel sebessége jelentősen megnőtt, a jel frekvenciájának felső határa körülbelül kétszáz Terahertz. Az áthallás itt egyáltalán nem jelentkezik, a csillapítási tulajdonságok is kedvezőek, és a fényjel nem érzékeny a külvilág elektromágneses zajaira sem. További előnye a megoldásnak, hogy viszonylag kevés elemnek van szüksége energia ellátásra, sok funkció megvalósítható passzív elemmel.

Az átviteli kapacitás további megsokszorozásához vezetett, hogy egy optikai kábelben egyszerre több független optikai csatornát sikerült kialakítani különböző hullámhosszra hangolva őket. Ezt a technikai megoldást *hullámhosszosztásos multiplexelésnek (Wavelength Division Multiplexing, WDM)* nevezik. A kapacitás megsokszorozásának mértéke, vagyis az egyszerre használható hullámhosszak száma korlátos: laboratóriumi körülmények között eddig kb. 100 csatornát sikerült kialakítani, de a gyakorlatban legfeljebb néhányszor 10 csatornát multiplexálnak össze egy fényvezetőbe. [5, 6]

A hullámhosszosztásos multiplexelés jelentősége korábban csak a két pont közti átviteli kapacitás megnövelése volt. Azonban gyakran felmerül az igény a hálózat nem szomszédos pontjainak nagy sáv szélességű összekapcsolására

is. Ekkor az átvitel több optikai szálon és elektromos csomóponton keresztül bonyolítható le. A szűk keresztmetszetet az elektromos adatfeldolgozás (csatornák kapcsolása, irányítása) és a jelek konvertálása (optikai-elektromos, elektromos-optikai) jelenti a köztes csomópontokban. Hiszen több, egyenként nagy sávszélességű optikai csatorna kapcsolása nehezedik a nagyságrendekkel lassabb elektromos csomópontokra. A helyzetet az 1. ábra a.) részén szemléltetjük, ahol az A és B illetve az A és D pontok között kell kialakítani csatornát, ezért a köztes C elágazási pontban egyszerre két optikai csatorna adattömegét kell feldolgozni és továbbítani.



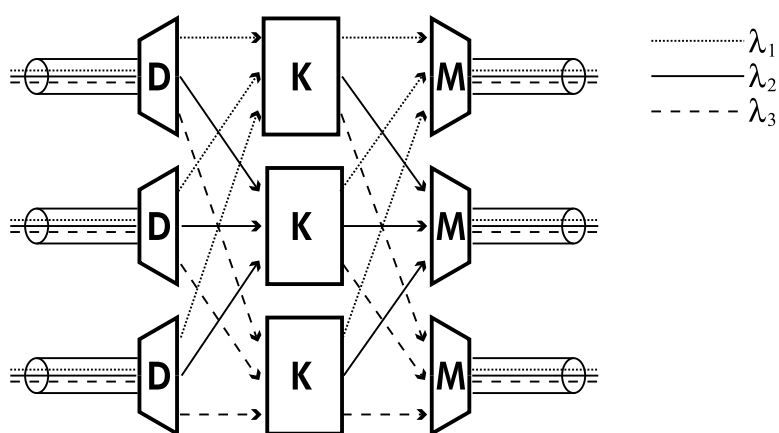
1. ábra.

Az A és B ill. az A és D pontpárok kommunikálnak egymással, a szaggatott vonal optikai csatornát jelez. Az a.) ábrán a C pont elektromos, a b.) ábrán optikai kapcsolást végez.

A nehézség feloldását az optikai kapcsolók bevezetése jelenti, melyek az optikai csatornák kapcsolását tisztán optikai eszközökkel oldják meg. Az 1. ábra b.) részén egy ilyen megoldást vázoltunk, ahol a C csomópontba egy optikai kapcsolót helyeztünk, így a csatornák megszakítás nélkül optikai jelként haladnak át rajta. Egy optikai kapcsoló logikai vázlata a 2. ábrán látható. Balról érkezők az optikai kábelek, az ezekben lévő csatornákat hullámhossz szerint szétválogatják a D jelű demultiplexerek. Az azonos színű csatornák között optikai kapcsolat történik a K kapcsolókban. Végül az egyes jeleket az M dobozokban multiplexálni kell a kimenő szálakba. Azaz a kapcsoló az egy szálban bejövő csatornákat hullámhosszuk alapján felismeri és ennek függvényében kapcsolja valamelyik kimenő szálba.

Az olyan WDM hálózatot, melynek minden pontjába optikai kapcsolót van tisztán optikai hálózatnak (*All Optical Network, AON*) nevezik. Egy

AON feladata, hogy adott pontpárokat kössön össze nagy sávszélességű, tisztán optikai csatornákkal. Az AON-ek már önálló hálózati réteget alkotnak, mely a magasabb elektromos rétegek számára sűrűbb, feladathoz igazítható összekötöttséget mutat az optikai csatornák konfigurálásával, mint a fizikai hálózati réteg a lefektetett kábelekkel. Az AON-ek a gyakorlatban még nem terjedtek el, de laboratóriumi körülmények között már kísérleteznek a működéshez szükséges kapcsolók kifejlesztésével. Széleskörű elterjedésük azért is várható, mert a már lefektetett optikai szálak cseréje nélkül, csak az optikai csomópontok üzembe helyezésével lesznek kialakíthatóak.



2. ábra. Egy optikai kapcsoló logikai vázlata.

2.2. A konfiguráció alapproblémája

Egy AON konfigurálásakor adott a hálózat topológiája és a kielégítendő igények végpontjai, melyek között optikai csatornákat kell majd kialakítani. Feltesszük, hogy az optikai csatornák és az igények azonos kapacitásúak. Ez nem egy jelentős megszorítás, mivel egyrészt a nagyobb igények helyettesíthetők több kisebbel, másrészt a technikából adódóan több kisebb igény nem használhat egy közös optikai csatornát.

A konfigurálás első lépcsője az *útelvezetés (routing)* megoldása, melyben minden igényhez egy utat kell rendelni. Utána az egyes utakhoz hullámhosszakot (színeket) kell választani, melyet *útszínezésnek (wavelength assignment)* nevezünk. Az útszínezés érvényes, ha a közös optikai szálon keresztül-

haladó utakhoz különböző szint rendel. A konfiguráció alatt a célunk, hogy végül minél kevesebb szint használjunk fel az igények kielégítésére, hiszen a WDM technikában a hullámhosszak száma erősen korlátozott.

2.3. Az alapprobléma változatai

Ebben a szakaszban olyan technikai eltéréseket ismertetünk, melyek lényegesen befolyásolhatják a feladat jellegét, egyben megjelöljük, hogy dolgozatunk későbbi részeiben melyik esettel foglalkozunk.

Az eddigi leírtak azt sugallták, hogy az igények a konfiguráció után „hosszú ideig” nem változnak. Illetve ha az igények halmaza idővel megváltozik, akkor az egész rendszer együttesen újrakonfigurálható. Az igények állandósága miatt ezt *statikus* problémának nevezzük. A közeljövőben várhatóan megjelenő gerinchálózati alkalmazások például ebbe a kategóriába esnek. Ugyanakkor sokan úgy képzelik, hogy hosszabb távon az optikai átvitelnek a hozzáférési hálózatban is lehet jelentősége, főleg a különösen nagy sáv szélességet igénylő alkalmazásokban (pl. videó konferencia). A *dinamikus problémánál* ha bizonyos igények megváltoznak, akkor a változatlanul maradók elvezetését és hullámhosszát nem szabad megváltoztatni, tehát a rendszer csak részlegesen konfigurálható újra.

A dinamikus problémán belül két további esetet különböztetünk meg. Az első esetben az igényhalmaz időbeli változása előre ismert, ilyenkor *off-line* módon a konfigurálás terve előre elkészíthető. A második esetben az igényhalmaz változása nem ismert előre, ezért az igények megváltozásakor az új igényeket *on-line* módon az aktuális helyzethez igazodva kell kielégíteni, esetleg csak lokális információk felhasználásával.

Az eddig ismertetett AON-ben teljesen elzárkóztunk a köztes elektromos csomópontok érintésétől (azaz optikai-elektromos-optikai átalakítástól). Egy igény két végpontját egy megszakítás nélküli optikai csatornával kötöttük össze. Ha a hullámhosszak korlátozott száma miatt nem lehet minden igényt kielégíteni egyetlen optikai csatornával, akkor az igényeket érdemes több szakaszra osztani és a szakaszok végpontjainál elektromos jellé alakítani. Így a szakaszonkénti színezési probléma esetleg már megoldható, sőt a hálózat elektromos pontjain az egy optikai csatornába beférő, közös szakaszon haladó igényeket össze is lehet multiplexálni. A tisztán optikai szakaszokat „ugráshoz” hasonlítják, ezért a szakaszolt hálózatokat *több-ugrásos (multi-hop)*, a megszakítás nélkülieket *egy-ugrásos (single-hop)* hálózatoknak nevezzük.

Az ismertetett optikai kapcsoló szerkezetéből adódóan minden optikai csatorna végig azonos hullámhosszt használ. A távolabbi jövőben elképzelhető olyan eszköz, mely nem csak kapcsol, hanem hullámhosszat is átalakít anélkül, hogy a jelet elektromos formára alakítaná. Ezek az eszközök az útszínezési problémát jelentősen egyszerűsíthetik. Szélsőséges esetben, ha a hálózat minden pontjában az optikai kapcsolók bármilyen színről bármilyenre tudnának konvertálni, akkor a konfigurálás feladata a többtermékes folyamproblémává alakulna. Több irányban folyik elméleti kutatás korlátozott számú ill. konvertálási képességű eszköz kihasználására optikai hálózatokban.

A diplomamunka hátralevő részében csak statikus konfigurálási problémát vizsgálunk, single-hop, konverterek nélküli tisztán optikai hálózatokban. Ez láthatóan a legegyszerűbb eset, de ennek megoldása helyenként felhasználható a bonyolultabbnak tűnő esetekben is. Például ha a köztes szakaszok végpontjait már meghatároztuk egy multi-hop hálózatban, akkor a szakaszok elvezetése és színezése a single-hop problémával ekvivalens.

3. Alapfogalmak

Az alábbi szakaszban formálisan is megfogalmazzuk a single-hop, konverterek nélküli tisztán optikai hálózatokban felmerülő statikus konfigurálási problémát. A tématerület fiatalsága miatt még az angol nyelvű irodalomban sem alakult ki egységes jelölésrendszer és a definíciók is kis mértékben eltérnek egymástól. A diplomamunkában szereplő meghatározások alapjául a fontosabb eredményeket röviden összefoglaló [2] cikk szolgált. A definíciók után egyszerűbb összefüggéseket, majd a speciális esetek rendszerezését tárgyaljuk.

3.1. Definíciók, jelölések

3.1.1. Definíció. Egy $\mathcal{G}(V, E)$ irányított gráf szimmetrikus, ha előáll egy irányítatlan gráf éleinek megkettőzésével és az élpárok ellentétes irányításával. Egy fa éleinek megkettőzésével és ellentétes irányításával nyert gráfot irányított szimmetrikus fának nevezzük.

A hálózat topológiáját egy irányítatlan vagy irányított $\mathcal{G}(V, E)$ gráf írja le. A csomópontok feleljenek meg az optikai kapcsolóknak, az élek az optikai szálaknak. A gráf nem tartalmaz hurokéleket, de párhuzamos éleket esetleg igen, továbbá irányított esetben a gráf szimmetrikus. (Ezeket a megszorításokat a gyakorlat indokolja, lásd 3.3.3. részben.)

3.1.2. Definíció. Egy $\mathcal{G}(V, E)$ hálózaton értelmezett igény egy (x, y) pár, ahol $x, y \in V$, és az igény \mathcal{G} irányítottságának megfelelően irányítatlan vagy irányított.

3.1.3. Definíció. Egy $\mathcal{G}(V, E)$ hálózaton értelmezett \mathcal{I} igényhalmaz a hálózaton értelmezett igények egy halmaza.

A későbbiekben a rendezett és nem rendezett párokat (az irányított és irányítatlan igényeket) jelölésben is megkülönböztetjük a (\cdot, \cdot) ill. a $\{\cdot, \cdot\}$ szimbólumokkal.

Valójában az igények végpontjaikkal történő azonosítása pontatlan, mert egy igényhalmazban előfordulhatnak megegyező végpontú, párhuzamos igények. Az ilyen igényeket nem tekintjük azonosnak vagy egyenlőnek. Megkülönböztetésükre sorszámozni kellene őket, azonban ettől az egyszerűség kedvéért eltekintünk.

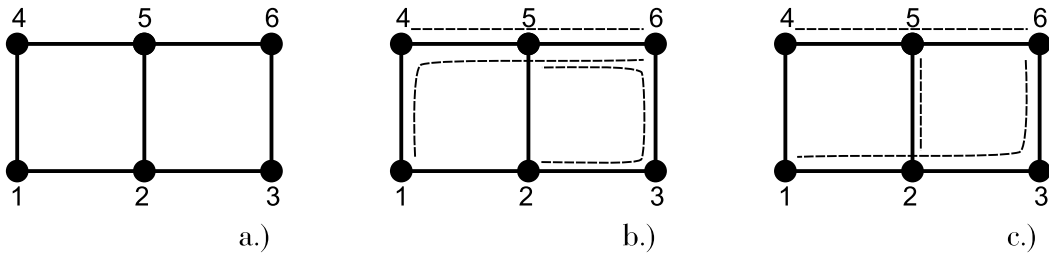
3.1.4. Definíció. Adott $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$ esetén, ahol \mathcal{G} egy hálózat és \mathcal{I} egy igényhalmaz, egy \mathcal{R} útelvezetés minden $(x, y) \in \mathcal{I}$ párhoz egy \mathcal{G} -beli $\mathcal{P}((x, y))$ utat (irányított utat) rendel.

3.1.5. Definíció. Adott $(\mathcal{G}(V, E), \mathcal{I}, \mathcal{R})$ esetén egy \mathcal{C} útszínezés minden $i \in \mathcal{I}$ igényhez (\mathcal{R} -beli úthoz) egy $c(i)$ színt rendel. Egy útszínezés érvényes, ha az azonos (irányított) élen keresztülhaladó (irányított) utak színe különböző. A felhasznált színek számát $\mathbf{W}_{\mathcal{R}, \mathcal{C}}$ -vel jelöljük.

3.1.6. Definíció. Adott $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$ esetén egy $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$ útelvezetés és annak érvényes útszínezése kielégíti az \mathcal{I} igényhalmazt \mathbf{W} színnel, ha $\mathbf{W}_{\mathcal{R}, \mathcal{C}} \leq \mathbf{W}$.

Megjegyezzük, hogy a későbbiekben „érvényes színezés” helyett gyakran csak „színezést” írunk, kivéve ha a színezési kényszerre akarunk utalni.

Az eddig definiált fogalmakat egy egyszerű példán szemléltetjük. A 3. ábra a.) részén egy hat pontú irányítatlan \mathcal{G} hálózatot láthatunk, ahol $\mathcal{I} = \{ \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{4, 6\} \}$. A b.) és c.) ábrákon berajzoltuk az igények egy \mathcal{R}_1 és egy \mathcal{R}_2 útelvezetését. Az \mathcal{R}_1 útjait mind különbözőre színezve egy érvényes \mathcal{C}_1 színezést kapunk. Ugyanakkor \mathcal{I} kielégíthető $\mathbf{W} = 1$ színnel is, hiszen az \mathcal{R}_2 útelvezetés esetén az igények egyformára színezhetőek.



3. ábra.

Az a.) ábra hálózatán értelmezett $\mathcal{I} = \{ \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{4, 6\} \}$ igényhalmaz egy egyszerű konfigurálási probléma, melynek a b.) és a c.) ábra egy-egy útelvezetését mutatja.

Az útelvezetés legfontosabb jellemző mennyisége a terhelés, melyet a következő definíciókban vezetünk be.

3.1.7. Definíció. Adott $(\mathcal{G}, \mathcal{I}, \mathcal{R})$ esetén egy él terhelése alatt az (irányított) élen áthaladó (irányított) utak számát, az \mathcal{R} útelvezetés terhelése alatt az éleken előforduló legnagyobb terhelést értjük. Ezt $\mathbf{L}_{\mathcal{R}}$ -rel jelöljük.

3.1.8. Definíció. Adott $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$ esetén az igényhalmaz terhelése

$$\mathbf{L}_{\min} = \min_{\mathcal{R}} \mathbf{L}_{\mathcal{R}} .$$

Megjegyezzük, hogy a dolgozat jelentős részében tárgyalt fa alakú hálózatok esetén egyetlen útelvezetése van minden igényhalmaznak. Ilyenkor az egyetlen útelvezetés terhelését egyszerűen \mathbf{L} -lel jelöljük.

Visszatérve példánkra a 3. ábra b.) részén berajzolt \mathcal{R}_1 útelvezetés esetén a $\{4, 5\}$ él terhelése 2, míg \mathcal{R}_2 esetén 1. Az \mathcal{R}_1 útelvezetés terhelése $\mathbf{L}_{\mathcal{R}_1} = 3$, a másik esetben $\mathbf{L}_{\mathcal{R}_2} = 1$. Az \mathcal{I} igényhalmaz terhelése $\mathbf{L}_{\min} = 1$.

Útszínezés esetén a legfontosabb mennyiség a felhasznált színek száma, amit igyekszünk a későbbiekben minimalizálni.

3.1.9. Definíció. Adott $(\mathcal{G}, \mathcal{I}, \mathcal{R})$ esetén

$$\mathbf{W}_{\mathcal{R}, \min} = \min_{c: \text{érvényes}} \mathbf{W}_{\mathcal{R}, c} .$$

A $\mathbf{W}_{\mathcal{R}, \min}$ érték az a minimális színszám, amivel egy útelvezetés útjait ki lehet színezni. Példánkban az első útelvezetésre $\mathbf{W}_{\mathcal{R}_1, \min} = 3$, míg a másodikra $\mathbf{W}_{\mathcal{R}_2, \min} = 1$.

3.1.10. Definíció. Adott $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$ esetén

$$\mathbf{W}_{\min} = \min_{\mathcal{R}} \mathbf{W}_{\mathcal{R}, \min} .$$

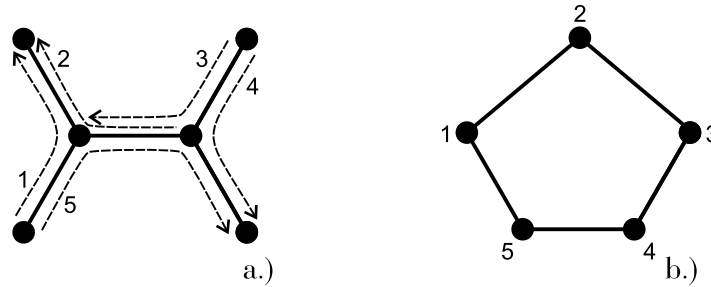
A \mathbf{W}_{\min} érték az a legkisebb színszám, amivel egy igényhalmaz igényei kielégíthetőek, figyelembe véve a különböző útelvezetéseket. Példánkban az \mathcal{I} igényhalmazra $\mathbf{W}_{\min} = 1$.

3.1.11. Definíció. Adott \mathcal{G} és $\mathbf{L} \in \mathbf{Z}^+$ esetén,

$$\mathbf{W}_{\mathbf{L}, \min} = \max_{\mathcal{I}: \mathbf{L}_{\min} = \mathbf{L}} \mathbf{W}_{\min} .$$

A $\mathbf{W}_{\mathbf{L}, \min}$ értékről a legrosszabb esetben optimalizálásnál lesz szó, melyet a következő fejezetben ismertetünk. A szakasz utolsó definíciójában bevezetünk egy gráfot az útszínezési feladat leírására.

3.1.12. Definíció. Adott $(\mathcal{G}(V, E), \mathcal{I}, \mathcal{R})$ -hez tartozó irányítatlan egyszerű $\mathcal{G}_k(V_k, E_k)$ gráfot konfliktus gráfnak nevezzük, melynek csúcsai az igények (\mathcal{R} útjai), továbbá két pont között akkor és csak akkor van él \mathcal{G}_k -ban, ha a megfelelő (irányított) utaknak van közös (irányított) éle \mathcal{G} -ben.



4. ábra.

Az *a.)* rész egy útszínezési problémát ábrázol egy irányított szimmetrikus fán, a *b.)* rész a megfelelő konfliktus gráfot mutatja.

A szakasz végén mutatunk egy a későbbiekben nagy jelentőséggel bíró példát egy irányított hálózaton értelmezett igényhalmaz egy útelvezetésének konfliktus gráfjára. A $(\mathcal{G}, \mathcal{I}, \mathcal{R})$ útszínezési feladat a 4. ábra *a.)* részén látható, \mathcal{G} irányított egymással szembe menő élpárjai helyett egyetlen irányítatlan élet rajzoltunk. Ezt a konvenciót a későbbiekben is betartjuk, azaz az ábrákon az irányított és irányítatlan esetek csak a berajzolt igények irányítottsága ill. a szöveggörnyezet alapján különböztethetők meg. Ne felejtjük el, hogy irányított modellben csak az irányított éleken keresztülhaladó utakat kell különböző színűre színezni! A probléma \mathcal{G}_k konfliktus gráfja az ábra *b.)* részén látható.

3.2. Alapvető összefüggések

Ebben a szakaszban a korábban bevezetett fogalmak közti egyszerű és alapvető összefüggéseket tárgyaljuk.

A dolgozatban gyakran találkozunk olyan kombinatorikus optimalizálási feladattal, melyben megengedett megoldások az érvényes útelvezetések és színezések, és célunk az \mathbf{L} terhelés vagy a \mathbf{W} színszám minimalizálása. Ha a lineáris programozáshoz hasonlóan két lépésre bontjuk a feladatot: megengedett megoldás keresésére és a célfüggvény minimalizálására, akkor azt látjuk, hogy az első triviális feladat. Ugyanis adott $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$ esetén ha a \mathcal{G} gráf (erősen) összefüggő, akkor az útelvezetési probléma megoldható, és ez a feltétel távközlő hálózatoknál nyilvánvalóan teljesül. Továbbá az $|\mathcal{I}|$ szint használó színezés mindig érvényes.

Az irányított és irányítatlan esetek nem teljesen függetlenek egymástól. Egy irányítatlan feladat megoldása egyben megoldást ad az élek és igények megduplázásával és ellentétes irányításával származtatható irányított feladatra is, de ez a fordított irányban nem igaz.

A színek számára a következőkben fontos alsó korlátot mutatunk. Érvényes $(\mathcal{G}, \mathcal{I}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ esetén egy $\mathbf{L}_{\mathcal{R}}$ maximális terhelésű élen átmenő összes út különböző színű, ezért $\mathbf{W}_{\mathcal{R}, \mathcal{C}} \geq \mathbf{L}_{\mathcal{R}}$.

3.2.1. Lemma. *Tetszőleges $(\mathcal{G}, \mathcal{I}, \mathcal{R})$ esetén*

$$\mathbf{W}_{\mathcal{R}, \min} \geq \mathbf{L}_{\mathcal{R}} .$$

□

Az előző egyenlőtlenség jobb, majd bal oldalán minimalizálva a lehetséges útelvezetések fölött adódik a következő lemma.

3.2.2. Lemma. *Tetszőleges $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$ esetén*

$$\mathbf{W}_{\min} \geq \mathbf{L}_{\min} .$$

□

Érdeemes összevetni a két lemmát, melyek közül az első egy magától értetődő alsó korlát. A második azért nem egészen triviális, mert nem biztos, hogy a minimális színszámú színezés és a minimális terhelés ugyanannál az útelvezetésnél valósítható meg.

Sok esetben e két lemma valamelyikével látható be egy színezésről, hogy minimális számú színt használ. Ugyanis ha egy \mathcal{R} útelvezetést $\mathbf{W} = \mathbf{L}_{\mathcal{R}}$ színnel színezünk, akkor $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\mathcal{R}, \min}$, hasonlóan ha egy igényhalmazt kielégítünk $\mathbf{W} = \mathbf{L}_{\min}$ színnel, akkor $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\min}$.

A szakasz utolsó állítása a konfliktus gráf pontszínezése és az útszínezés ekvivalenciáját írja le.

3.2.3. Lemma. *Adott $(\mathcal{G}, \mathcal{I}, \mathcal{R})$ esetén az utak színezése pontosan akkor érvényes, ha a nekik megfelelő \mathcal{G}_k -beli pontok csúcsszínezése érvényes. Továbbá*

$$\mathbf{W}_{\mathcal{R}, \min} = \chi(\mathcal{G}_k) ,$$

ahol $\chi(\mathcal{G}_k)$ a konfliktus gráf kromatikus száma.

□

3.3. Speciális esetek rendszerezése

A tisztán optikai hálózatokban felmerülő útelvezetési és útszínezési probléma minimális szín számmal általános esetben igen nehéz probléma. A témával foglalkozó művek is döntően valamilyen speciális esettel vagy becsléssel foglalkoznak.

Ebben a szakaszban a speciális esetek egy új rendszerezését ismertetjük, mely összhangban van [2] összefoglaló mű tárgyalásával, de annál teljesebb képet ad a feltehető kérdésekről. A rendszerezés egy új kérdéskört is felvet, a „maximális átvitel” ill. a „maximális értékű átvitel” problémáját, melyet évfolyamtársam, Marx D. javasolt. Az irodalomban több helyen előforduló, de sehol nem definiált „legrosszabb esetben optimalizálás” fogalmát is itt mondjuk ki pontosan először. Mindhárom újonnan bevezetett kérdésfelvetés előnye, hogy gyakorlati alkalmazási jelentőséggel bírnak, és elméletileg is érdekes, ismeretlen területre vezetnek.

A rendszerezésben felsorolunk különböző szempontokat, ill. az egyes szempontoknál olyan eseteket, melyekkel a későbbiekben foglalkozunk. Az egyes szempontokból egymástól függetlenül választhatunk, azok mindig értelmes speciális esethez vezetnek.

3.3.1. Kérdésfelvetés

A konfigurálási probléma minden esetben valamely igények kielégítését jelenti egy hálózaton. A feladat nehézsége erősen függ attól, hogy milyen feltételt szabunk a felhasználható színek számára, és attól hogy csak a teljes igényhalmaz kielégíthetőségével foglalkozunk-e.

1. *Az optimális színezés, \mathbf{W}_{\min} meghatározása.* Adott $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$ esetén a feladat \mathbf{W}_{\min} meghatározása és \mathcal{I} kielégítése \mathbf{W}_{\min} színnel.

A feladattal gyakorlatilag ekvivalens az az eldöntési probléma, hogy adott $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$ és $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}^+$ esetén, az \mathcal{I} igényhalmaz kielégíthető-e \mathbf{W} hullámhosszal.

2. *A legrosszabb esetben optimális színezés, $\mathbf{W}_{\mathbf{L}, \min}$ meghatározása.* Adott \mathcal{G} és $\mathbf{L} \in \mathbf{Z}^+$, a feladat $\mathbf{W}_{\mathbf{L}, \min}$ meghatározása és olyan algoritmus mutatása, mely tetszőleges $\mathcal{I} : \mathbf{L}_{\min} = \mathbf{L}$ igényhalmazt kielégít $\mathbf{W}_{\mathbf{L}, \min}$ színnel.

A legrosszabb esetben optimalizálás problémája akkor merül fel, ha egy távközlési szolgáltató a hálózatán \mathbf{L} terhelésű igényhalmazokat szeretne

kielégíteni. Felkészülve a legrosszabb esetre szükség van a hálózatban $\mathbf{W}_{L,\min}$ színre, de bármely L terhelésű igényhalmaz esetén csak $\mathbf{W}_{L,\min}$ színnel színező eljárást kell futtatni, amely könnyebb lehet az optimálisnál. Előfordul, hogy az optimális színezés **NP**-nehéz, de a legrosszabb esetben optimális színezés hatékonyan kezelhető.

3. *Maximális átvitel megvalósítása \mathbf{W} színnel.* Adott $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$ és $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}^+$, célunk

$$\max_{\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}: \mathbf{W}'_{\min} \leq \mathbf{W}} |\mathcal{I}'|$$

meghatározása, és a megfelelő kiválasztó, útelvezető és útszínező eljárás bemutatása.

A probléma a gyakorlatban akkor merül fel, ha az igényhalmaz egésze nem kielégíthető egy \mathbf{W} hullámhossz-kapacitású hálózaton, ezért az igények közül a lehető legtöbbet elégítjük ki. Ha feltesszük, hogy az igények ugyanakkora adatforgalmat bonyolítanak le, akkor maximális adatátvitelt valósítunk meg az igényhalmazból.

Ez a probléma nehezebb az 1. feladat eldöntési változatánál: a válasz pontosan akkor lesz a teljes \mathcal{I} halmaz, ha \mathcal{I} kielégíthető \mathbf{W} színnel. Így ha ezt a feladatot meg tudjuk oldani, akkor könnyen tudunk válaszolni az előző kérdésre is.

4. *Maximális értékű átvitel megvalósítása \mathbf{W} színnel.* Adott $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$, $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}^+$ és egy $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^+$ értékfüggvény, célunk

$$\max_{\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}: \mathbf{W}'_{\min} \leq \mathbf{W}} \sum_{i' \in \mathcal{I}'} f(i')$$

meghatározása, és a megfelelő kiválasztó, útelvezető és útszínező eljárás bemutatása.

Ez a probléma az előző általánosítása, az ennek egy olyan speciális esete, ahol az $f(\cdot)$ függvény konstans.

A feladat gyakorlati jelentősége, hogy kielégíthetetlen igényhalmazok esetén az értékfüggvény segítségével rugalmasan figyelembe vehetők a különböző prioritású igények.

3.3.2. Hullámhosszak száma

A feladatok megoldásában a leglényegesebb paraméter a hullámhosszak száma, ezt akarjuk minimalizálni, illetve ennek korlátozott értéke mellett akarjuk megoldani a problémákat. Azokban a problémákban ahol \mathbf{W} a bemenet része (1. eldöntési formája, 3., és 4.), elméleti szempontból jelentős egyszerűsítést tehetünk az alábbiak szerint.

- \mathbf{W} *nem rögzített*. Ha így tesszük fel a kérdést, akkor \mathbf{W} része a feladat bemenetének. Ha polinom idejű algoritmust keresünk a megoldásra, akkor annak a futási ideje nem nőhet exponenciálisan \mathbf{W} növelésével.
- \mathbf{W} *rögzített*. Ha így tesszük fel a kérdést, akkor \mathbf{W} nem része a feladat bemenetének. Úgy tekintünk \mathbf{W} -re, mint a feladatban rögzített konstansra. Ha polinom idejű algoritmust keresünk a megoldásra, akkor annak a futási idejét nem vizsgáljuk \mathbf{W} függvényében, csak azt követeljük meg, hogy a többi paraméter növelésével polinomiálisan nőjön.
- $\mathbf{W} = 1$. Egy érdekes speciális esethez jutunk, ha a hullámhosszak számát egyre korlátozzuk. Sok esetben már ez a feladat sem triviális.

3.3.3. Irányítottság

A definícióknál és jelöléseknél már leírtuk az irányított és irányítatlan modelleket, itt alkalmazási területüket tárgyaljuk. Meglepő, hogy a két eset megoldásának a nehézsége nagyon eltérő lehet, teljesen más jellegű problémákra vezethetnek.

- *Irányított modell*. Az optikai erősítők egy irányban működő eszközök, ezért az optikai szálakat is csak egy irányban használják. Továbbá az optikai szálakat mindig párosával fektetik, ezért az optikai hálózatok modellezésének természetes módja az irányított szimmetrikus gráfok használata irányított igényekkel.
- *Irányítatlan modell*. Ha az adatátviteli igényeket szimmetrikusaknak tekintjük, és (tervezési vagy üzemeltetési okokból) megköveteljük, hogy az adatok mindkét irányban azonos nyomvonalon és hullámhosszon haladjanak, akkor a feladatot irányítatlan modellben lehet megoldani. Minden oda-vissza szálpárt és igényt tekinthetünk egyetlen irányítatlan szálnak ill. igénynek, hiszen mindkét irányban ugyanazokat a hullámhosszakokat és utakat használjuk.

3.3.4. Igényhalmazok

- *Tetszőleges igényhalmaz.* Általános esetben egy hálózaton tetszőleges igényhalmaz felmerülhet, ezért indokolt ezzel az esettel foglalkozni. Azonban általános igényhalmazok esetén a probléma gyakran bonyolult és nehezen kezelhető.
- *All-to-all.* Az \mathcal{I}_a igényhalmaz minden pontpárra (irányított esetben rendezett pontpárra) tartalmaz egy őket összekötő igényt. Ez egy természetesen felmerülő szituáció, ha az optikai hálózatot úgy tekintjük, mint egy átviteli közeget, ami lehetővé teszi az összes csomópont kommunikációját.
- *One-to-all.* Az \mathcal{I}_o igényhalmaz egy pontot köt össze az összes többivel, irányított esetben csak az egyik irányban. A gyakorlatban egy elosztó, vagy egy hozzáférési hálózatban merülhet fel ilyen probléma.

3.3.5. Hálózati topológiák

A \mathcal{G} gráf alakja alapvetően befolyásolja a feladat nehézségét. Bizonyos speciális gráfok (gráfosztályok) választásával a probléma jelentősen leegyszerűsödik, jól kezelhetővé válik. Az alábbiakban felsoroljuk az általunk érintett topológiákat.

- *Láncok.* Olyan fák, ahol minden csúcs fokszáma legfeljebb kettő. Nagyon jól kezelhetőek, számos érdekes és szép tulajdonsággal bírnak.
- *Csillagok.* Olyan fák, amelyekben csak egy nem elsőfokú pont van. Szimmetriájukból következően az útszínezés probléma ismert struktúrákra vezet. Jelentőségük még abban rejlik, hogy egy fában felmerülő problémát gyakran visszavezethetünk csillagokban felmerülő problémákra.
- *Fák.* A fáknak fontos tulajdonsága, hogy az útelvezetés probléma megoldása triviális, csak egyféleképpen lehetséges. Így csak az útszínezés problémával kell foglalkoznunk.
- *Gyűrűk.* A gyakorlatban sokszor fordul elő, hogy a csomópontok gyűrűben vannak összekötve, számos technológia alapul gyűrű alapú hálózatokra. Népszerűségét annak köszönheti, hogy minimális élszám mellett

2-összefüggő, a védelem lehetőségét magában hordozó hálózati struktúra. Továbbá a kapcsolási funkciók is egyszerűek, hiszen egy gyűrű csak másodfokú pontot tartalmaz.

- *Síkgráfok.* Bizonyos nagyterjedésű hálózatoknál feltehetjük, hogy az optikai szálak csak csomópontokban keresztezik egymást. Érdekes megvizsgálni, hogy ezzel a feltétellel könnyebbé válik-e a probléma.
- *Egyszerű gráfok.* Itt csak azt követeljük meg, hogy a csomópontok közt ne legyenek párhuzamos élek.
- *Általános gráfok.* Technológiai szempontból elég kézenfekvő dolog párhuzamosan több optikai szálát használni: a kábelfektetés és alépítmény építés költsége ettől nem növekszik. Ennek megfelelően a topológiát leíró gráfban párhuzamos éleket kell felvennünk.

4. Láncok

A lánc alakú hálózatok egyszerű topológiájú, mégsem jelentéktelen hálózatok. Elméleti szempontból azért érdekesek, mert ez az egyetlen olyan gráfosztály, ahol az összes általunk feltett kérdésre sikerült polinom idejű algoritmust mutatni. A láncok egyik fontos alkalmazási területe, hogy a gyakorlatban oly népszerű gyűrűt egy pontjánál vagy élénél felvághatjuk és így egy lánchoz jutunk. Az itt használt algoritmusok kivétel nélkül alkalmazhatóak gyűrűkben is, és a láncsal történő közelítő megoldás optimumtól való eltérése is jól becsülhető.

Mint a bevezetőben már említettük, lánc alakú hálózaton egy egyetlen útból álló gráfot értünk. A láncot és a rajta felmerülő igényeket vízszintesen képzeljük el, ezért beszélhetünk egy lánc vagy egy igény *bal* ill. *jobb* végpontjáról. Mint bármilyen más fa alakú hálózatban láncokban sem merül fel az útelvezés problémája. Sőt itt még az irányított és irányítatlan esetek sem különböznek egymástól lényegesen. Ugyanis egy irányított szimmetrikus láncon értelmezett igényhalmaz balra és jobbra menő igényei egymástól függetlenül színezhetőek, valamint a két feladat ekvivalens egy-egy irányítatlan feladattal. Így a fejezet hátralevő részében megfogalmazott állításokat általában láncokra mondjuk ki, de csak irányítatlan láncokra bizonyítjuk, hiszen a fenti kiegészítéssel azok igazak az irányított esetben is.

Egy lánc pontjait balról az $1, 2, \dots, n$ számokkal jelöljük és az igényeket végpontjaikkal reprezentáljuk. Tetszőleges \mathcal{I} igényhalmaz ábrázolható él-metszéstartóan egy $|\mathcal{I}|$ élű láncon. Ugyanis nyújtsuk meg az igényeket balra addig, ameddig még nem keletkezik új konfliktus. Utána ha a k csúcs se nem kezdő-, se nem végpontja egyetlen igénynek akkor hagyjuk el, és a $k - 1$ pontot kössük össze $k + 1$ -gyel. Ezt a legfeljebb $|\mathcal{I}|$ élű, azaz $n = |\mathcal{I}| + 1$ pontú reprezentációt *takarékosnak* nevezzük. Megjegyezzük, hogy az egymást páronként nem metsző igényeket tartalmazó igényhalmaz esetén szükség is van ennyi élre.

4.1. Optimális színezés

Az optimális színezés problémája láncokon már hosszú ideje tisztázott kérdés, többen más környezetben megfogalmazták és megoldották a feladatot, amit ebben a szakaszban is ismertetünk. A láncokon felmerülő igényhalmazok perfekt gráfokkal való kapcsolatáról még a későbbiekben lesz szó.

4.1.1. Tétel. *Egy lánc alakú hálózaton tetszőleges \mathbf{L} terhelésű \mathcal{I} igényhalmaz hatékonyan, $\mathcal{O}(\max\{n, |\mathcal{I}|\})$ időben színezhető $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ színnel.*

Bizonyítás: Tekintsük az igényeknek egy olyan sorrendezését, ahogyan bal végpontjaik elhelyezkednek a hálózaton. Ha a lánc n hosszú, akkor az igények bal végpont szerinti rendezése egy láda rendezés segítségével elvégezhető $\mathcal{O}(\max\{n, |\mathcal{I}|\})$ időben [30], hiszen a (bal) végpontok mind az $1, 2, \dots, n$ tartományba esnek. Egy ilyen sorrendben mohó módon színezzük az igényeket, azaz a már kiszínezetteket nem színezzük újra, és a sorrendben következő igény színezéséhez csak akkor használunk új színt ha szükséges.

A színezés közben egy új igényt pontosan azoktól a színektől kell különböztetni, amelyek az új igény bal szélső élén már előfordulnak. (Hiszen a korábban kiszínezett igények bal végpontja nem lehet jobbra az új igény bal szélső élétől.) Az új igény bal szélső élén rajta kívül legfeljebb $\mathbf{L} - 1$ igény halad keresztül, ezért a mohó színezésnek nincs szüksége \mathbf{L} -nél több színre.

Másrészt a 3.2.1. lemmából tudjuk, hogy bármely színezés legalább \mathbf{L} színt használ, tehát a fenti színezés optimális és az egyenlőség teljesül. \square

Megjegyezzük, hogy ha a bemeneten az ábrázolás takarékos volt, akkor $n \leq |\mathcal{I}| + 1$, ezért az algoritmus ebben az esetben lineáris futási idejű.

Az előbbi tételnek a segítségével nem csak az optimális színezés problémáját oldottuk meg, hanem az is látható, hogy $\mathbf{W}_{\mathbf{L}, \min} = \mathbf{L}$ és a legrosszabb esetben optimális színezés is megoldott. A feltehető kérdéseink közül már csak a nehezebb maximális átvitel és maximális értékű átvitel problémáját kell megvizsgálnunk. Itt nagy segítséget jelent az előző tétel, mely jól ellenőrizhető szükséges és elégséges feltételt ad a \mathbf{W} -színezhetőségre, hiszen az igényeknek egy \mathcal{I}' részhalmaza pontosan akkor \mathbf{W} -színezhető, ha semelyik él terhelése sem nagyobb \mathbf{W} -nél.

4.2. Maximális értékű átvitel

Konzulensünkkel, Friedl Katalinnal és Marx Dániellel egyik első közös eredményünk, hogy a maximális értékű átvitel probléma láncokon egészértékű lineáris programozással megoldható polinom időben. Mielőtt ezt belátnánk kimondjuk azt az eredményt, mely az egészértékű és folytonos lineáris programozás között teremt kapcsolatot.

4.2.1. Definíció. *Egy mátrix totálisan unimoduláris, ha minden négyzetes részmátrixának determinánsa 0, 1 vagy -1 .*

4.2.1. Tétel. *Legyen A totálisan unimoduláris mátrix, b egy csupa egész koordinátájú vektor, c tetszőleges (valós koordinátájú) vektor. Ekkor a*

$$\max\{c'x \mid x \geq 0, Ax \leq b, x \text{ egész}\}$$

feladat megoldása megegyezik az „ x egész, feltétel elhagyásával adódó LP feladat megoldásával. [19] \square

Megjegyezzük, hogy a változókra további felső (alsó) korlátokat is megadhatnunk az ILP feladatban. Ugyanis egy új felső (alsó) korlát bevezetésével az A mátrixhoz egy olyan sort kell hozzávenni, amely 0-kon kívül egyetlen 1 (vagy -1) számot tartalmaz, és egy totálisan unimoduláris mátrix egy ilyen sorral kiegészítve is totálisan unimoduláris.

Adott a \mathcal{G} lánc alakú hálózaton az \mathcal{I} igényhalmaz és egy rajta értelmezett $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^+$ értékfüggvény. Takarékos ábrázolás esetén feltehetjük, hogy \mathcal{G} -nek $e \leq |\mathcal{I}|$ éle van. Rendeljük minden $i \in \mathcal{I}$ igényhez egy e dimenziós a_i oszlopvektort, melynek j -ik koordinátája 1, ha az i igény keresztülmegy a lánc j -ik élén és 0 különben. Tehát az a_i vektor egy folytonos 1-ekből álló sorozattal jelöli ki az i igény éleit a láncon. Az egészértékű lineáris programozási (ILP) feladat a következőképpen írható fel:

- $A = (a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{|\mathcal{I}|}})$ egy $|\mathcal{I}| \times e$ méretű mátrix.
- $c = (f(i_1) f(i_2) \dots f(i_{|\mathcal{I}|}))$ egy $|\mathcal{I}|$ dimenziós oszlopvektor.
- $b = (\mathbf{W}\mathbf{W} \dots \mathbf{W})$ egy e dimenziós oszlopvektor.
- x egy $|\mathcal{I}|$ dimenziós változókból álló oszlopvektor.

$$\max\{c'x \mid Ax \leq b, x \in \{0, 1\}\}$$

A 4.1.1. tételből adódóan az ILP feladat megengedett megoldásai és az \mathcal{I} igényhalmaz \mathbf{W} színnel színezhető részhalmazai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek egymásnak úgy, hogy egy x vektorhoz az $\{i_j \mid x_j = 1\}$ részhalmaz tartozik. Látható, hogy az ILP feladat optimális megoldása a maximális értékű átvitel problémának is megoldása.

4.2.2. Tétel. *A maximális értékű átvitel \mathbf{W} színnel lánc alakú hálózatokon tetszőleges igényhalmaz és értékfüggvény esetén polinom időben megoldható.*

Bizonyítás: Az eddigiek után már csak azt látjuk be, hogy a felírt ILP feladat megoldható polinom időben. Elég megmutatni, hogy az A mátrix totálisan unimoduláris, mert a 4.2.1. tételt alkalmazva az egészértékűségi feltételt elhagyva a folytonos feladat már megoldható a mátrixok és vektorok méretéhez képest polinom sok lépésben [19].

Az A mátrix minden oszlopában 0 és 1 számok szerepelnek és az egyesek egy folytonos intervallumot alkotnak. Az A bármely A' négyzetes részmátrixa is ugyanilyen tulajdonságú. Vonjuk le az első sorából a másodikat, a másodikból a harmadikat stb. Az így kapott mátrix determinánsa változatlan, továbbá minden oszlopában pontosan egy 1-es és legfeljebb egy -1 -es szerepel, a többi elem mind 0. Hozzávéve egy megfelelő sort felülre elérhető, hogy minden oszlopban pontosan egy -1 -es legyen. A kiegészített mátrix egy irányított gráf élmátrixa, mely totálisan unimoduláris [1], ezért az első sor elhagyásával nyert részmátrix determinánsa 0, $+1$ vagy -1 . \square

A fenti bizonyításnak hátránya, hogy a feladat speciális szerkezetétől távoli, általános és bonyolult megoldási módszert alkalmaz. A polinom idejű lineáris programozási módszereket összetettségük miatt a gyakorlatban nem használják, helyette az átlagosan nagyon jól viselkedő, de esetleg exponenciális szimplex módszert alkalmazzák. Ezért megkíséreltünk lineáris programozás nélkül is polinom idejű algoritmust mutatni a maximális értékű átvitel problémára, mely általános esetben egyelőre nem sikerült.

Egyik fontos eredmény Marx Dánieltől, hogy sikerült a maximális átvitel probléma megoldására (tehát a konstans értékfüggvény esetére) egy lineáris programozást nem használó eljárást találnia. Az algoritmus több a feladatot egyszerűsítő lépésből áll, melyek végrehajtása triviálissá egyszerűsíti a színezést.

Egymástól függetlenül, kissé eltérő érvek alapján jutottunk az alábbi állításhoz.

4.2.3. Tétel. *A maximális értékű átvitel $\mathbf{W} = 1$ színnel lánc alakú hálózatokon tetszőleges \mathcal{I} igényhalmaz és $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^+$ értékfüggvény esetén megoldható $\mathcal{O}(|\mathcal{I}|^2)$ időben.*

Bizonyítás: Már említettük, hogy az \mathcal{I} igény reprezentálható egy $|\mathcal{I}|$ élű, $|\mathcal{I}| + 1$ pontú láncon, melynek pontjai balról a $\{0, 1, \dots, |\mathcal{I}|\}$ számok. Definiálunk egy $\mathcal{G}'(V', E')$ irányított gráfot, melyre

- $V' = \mathcal{I}$

- $(i_1, i_2) \in E'$ pontosan akkor, ha az i_1 igény minden éle balra helyezkedik el az i_2 igény bal végpontjától.

A $\mathbf{W} = 1$ színnel színezhető részhalmazok és \mathcal{G}' útjai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. Így feladatunk egy maximális értékű út keresése a \mathcal{G}' gráfban, ahol az út értéke a rajta szereplő pontoknak megfelelő igények értékének összege. A \mathcal{G}'' gráfot \mathcal{G}' -ből úgy nyerjük, hogy minden pontot megduplázunk, a beérkező éleket az egyikbe vezetjük, a kimenőket a másiktól indítjuk, és a kettő közé egy irányított élet veszünk fel. Egy új \mathcal{G}'' -beli él értéke a megfelelő \mathcal{G}' -beli pont értéke, a többi már \mathcal{G}' -ben is előforduló él értéke 0. Ezzel \mathcal{G}'' -ben már olyan maximális értékű utat kell keresnünk, ahol a nem negatív értékfüggvény az éleken értelmezett. A konstrukcióból látható, hogy \mathcal{G}'' nem tartalmaz irányított kört, pontjainak száma $2|\mathcal{I}| + 2$, és éleinek száma legfeljebb $(2|\mathcal{I}| + 2)|\mathcal{I}| = \mathcal{O}(|\mathcal{I}|^2)$. Ilyen gráfban a maximális értékű út $\mathcal{O}(|\mathcal{I}|^2)$ időben megtalálható a PERT módszer segítségével [30]. \square

4.3. Összefoglalás

Láttuk, hogy minden problémára tudtunk (különböző bonyolultságú) polinomiális algoritmust adni. Az irányított eset egyszerűen visszavezethető az irányítatlanra. Az all-to-all igényhalmaz speciális esete az általános algoritmusokkal kezelhető. Az eredményeket az alábbi táblázatban foglaljuk össze.

Láncok, \mathcal{I} igényhalmaz				
$\mathbf{W} = 1$ hullámhossz		$\mathbf{W} = k$ hullámhossz		
Maximális átvitel	Maximális értékű átvitel	Optimális színezés	Maximális átvitel	Maximális értékű átvitel
dinamikus programozás	dinamikus programozás	lineáris idejű algoritmus	polinomiális algoritmus	LP, polinomiális

5. Csillagok

A csillagok előnyös tulajdonsága, hogy az igényhalmazok terhelése viszonylag kicsi. Összehasonlítva egy n pontú láncot és egy csillagot az \mathcal{I}_a all-to-all igényhalmaz terhelése az előbbinél $(\frac{n}{2})^2$, míg az utóbbinál $n - 1$. Ennek azonban ára van, egyedül a középső pontra nehezedik a kapcsolás problémája, annak meghibásodása minden kommunikációs utat megszüntet.

Jelentőségük nem abban van, hogy ténylegesen ilyen gerinc hálózatokat volna érdemes építeni, de bizonyos esetekben jól modellezi egy bonyolultabb hálózat egy pontjában lokálisan felmerülő útszínezési problémát. Például a fáknál alkalmazott színezési eljárások is mind csillagokon alkalmazott lokális színezések sorozatából állnak.

5.1. Az útszínezés kapcsolata az élszínezéssel

Ebben a szakaszban bemutatjuk, hogy az útszínezés csillagokban és az élszínezés gráfokban egymásra visszavezethető problémák. A csillagokról kimondott összes állításunk ezen a kapcsolaton múlik. Mint később látni fogjuk, az irányított és irányítatlan esetek visszavezetése még hasonló, de a levonható következtetések már nagyban eltérnek egymástól. Azt az egy problémát, amely azonos eredményre vezet az irányított és irányítatlan esetekben hasonló, ennek a szakasznak a végén tárgyaljuk.

Az irányítatlan eset Golumbic és Jamison eredményének alkalmazása WDM hálózatokra [15]. Az irányított visszavezetést először a [21] cikkben publikálta Mihail, Kaklamanis és Rao.

Az állítások kimondásához rögzítjük, hogy pontosan milyen értelemben használjuk a "két színezés ekvivalens" szókapcsolatot.

5.1.1. Definíció. *Egy hálózathoz tartozó \mathcal{I} igényhalmaz útszínezése és egy $\mathcal{G}(V, E)$ gráf élszínezése ekvivalens, ha \mathcal{I} és E elemei kölcsönösen egyértelmű kapcsolatba hozhatók úgy, hogy egy rajtuk értelmezett színezés pontosan ugyanakkor legyen érvényes az útszínezési és élszínezési feladatokban.*

Legyen $\mathcal{S}(V_S, E_S)$ egy irányítatlan csillag alakú hálózat, \mathcal{I} egy rajta értelmezett igényhalmaz \mathbf{L} terheléssel, és $\mathcal{G}(V, E)$ egy irányítatlan, hurokél mentes gráf Δ maximális fokszámmal.

5.1.1. Lemma. *Tetszőleges $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ -hez konstruálható egy $\mathcal{G}(V, E)$ és tetszőleges $\mathcal{G}(V, E)$ -hez konstruálható egy $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ úgy, hogy $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ útszínezése és \mathcal{G} élszínezése ekvivalens legyen. Továbbá mindkét konstrukció esetén $\mathbf{L} = \Delta$.*

Bizonyítás:

$\mathcal{G}(V, E) \rightarrow (\mathcal{S}, \mathcal{I})$: $V_{\mathcal{S}} := V \cup \{v\}$, legyen v a nem elsőfokú pont az \mathcal{S} csillagban, valamint $\mathcal{I} := E$. (Így \mathcal{I} csak kettő hosszú igényeket tartalmaz.)

$(\mathcal{S}, \mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{G}(V, E)$: Az előző konstrukció kis módosítással fordítva is megfelelő lesz. Jelölje az \mathcal{S} nem elsőfokú pontját v és elsőfokú pontjait v_1, v_2, \dots, v_n . A nem elsőfokúaknak megfelelően két-két pontot vegyünk fel \mathcal{G} -be, azaz $V := \{v_1, v_2, \dots, v_n, v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$. Az E élhalmazba vegyünk fel a kettő hosszú $\{v_i, v_j\} \in I$ igényeknek megfelelően egy-egy $\{v_i, v_j\}$ élet, az egy hosszú $\{v, v_i\} \in \mathcal{I}$ igényeknek megfelelően egy-egy $\{v, v'_i\}$ élet.

Két igényt egy \mathcal{S} csillagban akkor kell különbözőre színezní, ha van közös elsőfokú végpontjuk. Hasonlóan \mathcal{G} -ben két élet akkor kell különbözőre színezní, ha valamely v_i pontra illeszkednek. (A v'_i pontokra való illeszkedés nem jelent további megkötést az $(\mathcal{S}, \mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{G}(V, E)$ konstrukciónál). Ezzel beláttuk, hogy a két színezés ekvivalens.

A konstrukciókból látható, hogy az \mathcal{S} csillagban a $\{v, v_i\}$ él terhelése megegyezik v_i pont fokával a \mathcal{G} gráfban, ahonnan adódik az $\mathbf{L} = \Delta$ egyenlőség.

□

Az irányított esetben csak az egyik irányú megfeleltetést mondjuk ki, mert a későbbiekben csak erre lesz szükség. Mostantól \mathcal{S} egy szimmetrikus irányított csillag alakú hálózatot, \mathcal{P} egy irányítatlan páros gráfot jelöl. Az \mathcal{I} igényhalmaz terhelése \mathbf{L} és \mathcal{P} maximális fokszáma Δ .

5.1.2. Lemma. *Tetszőleges $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ -hez konstruálható egy $\mathcal{P}(A, B, E)$ úgy, hogy $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ útszínezése és \mathcal{P} élszínezése ekvivalens legyen, továbbá $\mathbf{L} = \Delta$.*

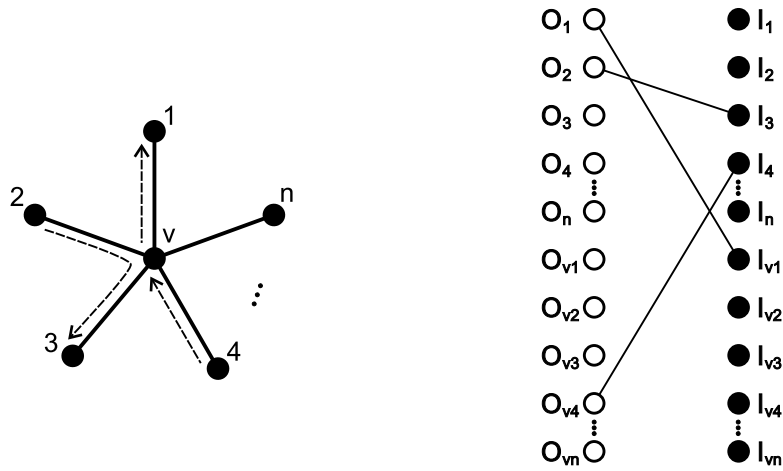
Bizonyítás: Az \mathcal{S} csillag elsőfokú pontjait most az $1, 2, \dots, n$ számokkal, a nem elsőfokú pontját v -vel jelöljük. Legyen $A := \bigcup_{i=1}^n \{O_i, O_{vi}\}$ és $B := \bigcup_{i=1}^n \{I_i, I_{iv}\}$. Az eredeti feladat $(i, j) \in \mathcal{I}$ igényének egy $\{O_i, I_j\} \in E$, egy $(v, i) \in \mathcal{I}$ -nek egy $\{O_{vi}, I_i\} \in E$ és egy $(j, v) \in \mathcal{I}$ -nek egy $\{I_{vj}, O_j\} \in E$ élet feleltetünk meg, ahol $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Az ekvivalencia onnan látható, hogy \mathcal{I} két igényét pontosan akkor kell, különbözőre színezní, ha ugyanabból az elsőfokú pontból indulnak vagy ugyanabba érkeznek. Ennek megfelelően \mathcal{P} -ben egy él akkor és csak akkor illeszkedik O_i -re, ha a megfeleltetett igény az i pontból indul, és I_j -re, ha a j -be érkezik. (Az O_{vi} és I_{jv} pontokra való illeszkedés színezési szempontból már nem jelent újabb megkötést.)

Az egyenlőség abból adódik, hogy a hálózat egy elsőfokú pontjából induló (érkező) él terhelése, a megfelelő O_i (ill. I_j) pont foka \mathcal{P} -ben. (És az I_{iv} (ill. O_{vj}) pont foka nem nagyobb O_i (ill. I_j) pont fokánál.)

A konstrukciót az 5. ábrán egy egyszerű példán szemléltetjük. □

A megfeleltetéseket tömören úgy is interpretálhatjuk, hogy irányítatlan csillagokban az igényhalmazok konfliktus gráfja egy irányítatlan hurokél mentes gráf élgráfja, irányított esetben páros gráf élgráfja. Valamint tetszőleges hurokél mentes gráfhoz létezik olyan csillag és rajta értelmezett igényhalmaz, melynek konfliktus gráfja izomorf a gráffal.



5. ábra.

Irányított csillagon értelmezett igényhalmaz és a megfelelő élszínezési probléma.

A szakasz végén bemutatjuk az egyetlen olyan alkalmazását a megfeleltetéseknek, mely ugyanarra az eredményre vezet az irányított és irányítatlan esetekben, a maximális értékű átvitel problémáját $\mathbf{W} = 1$ színnel. Ha az egy színnel színezhető igények egy halmazát keressük, akkor az 5.1.1 és az 5.1.2. lemmák alapján független élek egy halmazát is kereshetjük a megfelelő \mathcal{G} illetve \mathcal{P} gráfokban. Így a maximális értékű átvitel problémája a már polinom időben megoldott maximális súlyú párosítás keresésére vezethető vissza.

5.1.1. Állítás. *Tetszőleges csillag alakú hálózatnál, \mathcal{I} igényhalmaznál és $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^+$ értékfüggvényénél a maximális értékű átvitel probléma megoldására mind az irányítatlan, mind az irányított esetben létezik polinom idejű algoritmus.* \square

Megjegyezzük, hogy az irányítatlan esetben a megoldás bár polinom idejű, de bonyolult és nagy futási idejű, mivel a párosítást egy tetszőleges \mathcal{G} gráfban keressük [4]. Ezzel szemben irányított esetben egy páros gráfban a König-Egerváry-tétel bizonyításában használt magyar módszer segítségével egyszerű és gyors algoritmus implementálható a maximális súlyú párosítás megtalálására [1].

5.2. Útszínezés az irányítatlan esetben

5.2.1. Az optimális színezés

Az 5.1.1. lemma szerint \mathbf{W}_{\min} meghatározásának problémája az irányítatlan esetben nem könnyebb egy tetszőleges hurokélmentes \mathcal{G} gráf kromatikus indexének ($\chi_e(\mathcal{G})$) kiszámításánál. Holyer eredménye alapján ismert, hogy tetszőleges \mathcal{G} gráf esetén annak eldöntése, hogy $\chi_e(\mathcal{G}) \leq 3$ teljesül-e **NP**-nehéz. [16].

5.2.1. Állítás. *Ha \mathcal{S} egy irányítatlan csillag alakú hálózat és \mathcal{I} egy tetszőleges rajta értelmezett igényhalmaz, akkor az optimális színezés eldöntési változata még a $\mathbf{W} \geq 3$, rögzített bemenet esetén is **NP**-nehéz.* \square

Az előbbi negatív állítás után kézenfekvőnek látszik az optimálist közelítő hatékony eljárások keresése. Most is az 5.1.1. lemmát használjuk, ám fordított értelemben mint az előbb, azaz egy adott $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ irányítatlan feladathoz konstruálunk egy \mathcal{G} élszínezési problémát, melyre az irodalomban fellelhető közelítő eljárásokat alkalmazzuk. Shannon eredménye alapján \mathcal{G} élei hatékonyan színezhetőek $\frac{3}{2}\Delta_{\mathcal{G}}$, és a Vizing-tétel szerint $\Delta_{\mathcal{G}} + m_{\mathcal{G}}$ színnel, ahol $m_{\mathcal{G}}$ a gráfban előforduló legnagyobb multiplicitás [17]. Egy új polinom idejű színezési eljárást ismertetnek a [25] műben, mely legfeljebb $\lceil 1.1\chi_e(G) + 0.8 \rceil$ színt használ. Az $\mathbf{L} = \Delta_{\mathcal{G}}$, $\mathbf{W}_{\min} = \chi_e(G)$ és $m = m_{\mathcal{G}}$ azonosságokból adódnak a következő közelítő eljárások WDM hálózatokon. (m az igényhalmazban előforduló multiplicitás.)

5.2.2. Állítás. *Tetszőleges $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ feladatnál, \mathcal{I} igényei $\mathbf{W} = \frac{3}{2}\mathbf{L}$ színnel hatékonyan kielégíthetők.* \square

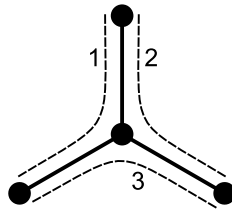
5.2.3. Állítás. *Tetszőleges $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ feladatnál, \mathcal{I} igényei $\mathbf{W} = \mathbf{L} + m$ színnel hatékonyan kielégíthetők.* \square

5.2.4. Állítás. *Tetszőleges $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ feladatnál, \mathcal{I} igényei $\mathbf{W} = \lfloor 1.1\mathbf{W}_{\min} + 0.8 \rfloor$ színnel hatékonyan kielégíthetők.* \square

Megjegyezzük, hogy a felsorolt közelítések közül egyik sem erősebb a másiknál: bármely becsléshez található olyan példa, amelynél ő adja legkisebb felső korlátot.

5.2.2. Legrosszabb esetben optimális színezés

Tetszőleges legalább harmadfokú csillagon és $\mathbf{L} \in \mathbf{Z}^+$ esetén mutatható olyan igényhalmaz, ahol ténylegesen szükséges $\frac{3}{2}\mathbf{L}$ szín. Ilyen példát láthatunk a 6. ábrán, ahol a berajzolt igények helyére $\mathbf{L}/2$ széles igénykötegeket képzelünk. Látható, hogy a terhelés \mathbf{L} , és mind a $\frac{3}{2}\mathbf{L}$ igényt különböző színűre kell színezni. Mivel az 5.2.2. állítás alapján tetszőleges \mathbf{L} terhelésű igényhalmaz ki is színezhető ennyi színnel, a példa egy „legrosszabb esetet” ábrázol, továbbá az 5.2.2. állítás eljárása legrosszabb esetben optimális.



6. ábra.

Írányítatlan csillagoknál és fáknál a legrosszabb esetet ábrázoló igényhalmaz.

Másrészt a háromnál kisebb maximális fokszámú csillagok láncok, így a 4.1.1. tétel eredménye alapján ezekben tetszőleges igényhalmaz \mathbf{L} színnel kielégíthető. Ezzel beláttuk az alábbi állítást:

5.2.5. Állítás. Irányítatlan csillagoknál

$$\mathbf{W}_{L,\min} = \begin{cases} \frac{3}{2}\mathbf{L} & \text{ha } \Delta > 2 \\ \mathbf{L} & \text{különben} \end{cases}$$

és a legrosszabb esetben optimális szín számmal hatékonyan lehet színezní. \square

5.3. All-to-all kommunikáció az irányítatlan esetben

Miután láttuk, hogy az útszínezés irányítatlan csillagoknál **NP**-nehéz, megvizsgáljuk, hogy könnyebb feladathoz jutunk-e, ha a rögzített all-to-all igényhalmaz igényeit elégítjük ki. Az $n+1$ pontú csillagon értelmezett \mathcal{I}_a igényhalmazhoz is elkészítjük a \mathcal{G} gráfot az 5.1.1. lemmában leírt konstrukció alapján. A \mathcal{G} gráfban a v_1, v_2, \dots, v_n pontok egy n csúcsú teljes gráfot feszítenek ki. Az ebben szereplő $\{v_i, v_j\}$ éleket *belső éleknek* nevezzük, amelyek a kettő hosszú igényeknek felelnek meg. Ezen kívül \mathcal{G} tartalmaz még n darab *külső élet*: az egy hosszú igényeknek megfeleltetett, egymástól független $\{v_i, v'_i\}$ éleket, $i = 1, \dots, n$.

Az optimális színezés kapcsán kis kiegészítéssel az n csúcsú teljes gráf élszínezését ismertetjük. Ezzel a feladattal ismert elemi gráfelmélet példák között is találkozhatunk, amikor minimális számú forduló alatt rendezünk körmérkőzést n csapat között. A maximális átvitel saját, míg a maximális értékű átvitel megoldásáról szóló rész Marx Dániellel közös eredmény.

5.3.1. Optimális színezés

5.3.1. Állítás. *Tetszőleges irányítatlan csillagnál az \mathcal{I}_a igényhalmaz hatékonyan kielégíthető $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ színnel.*

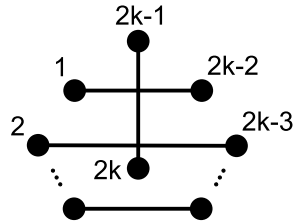
Bizonyítás: A bizonyítás során a szakasz bevezető részében említett \mathcal{G} gráf éleit színezzük ki.

Ha $n = 2k$ (páros), akkor rajzoljuk le a $v_1, v_2, \dots, v_{2k-1}$ pontokat egy szabályos $2k - 1$ -szög csúcsaiba, és középpontjába vegyük fel a v_{2k} pontot a 7. ábrán látható módon. Az ábrán berajzolt belső élekből álló független élhalmazt színezzük c_1 színnel, vele egybevágó elforgatottjait $c_2, c_3, \dots, c_{2k-1}$ színekkel, és a külső élek halmazát a c_{2k} színnel.

Ha $n = 2k - 1$ (páratlan), akkor az ábrán lévő v_{2k} pont és a függőleges él nem része \mathcal{G} -nek. Színezzük a c_1 színnel az ábrán vízszintesen berajzolt

belső éleket és a $\{v_{2k-1}v'_{2k-1}\}$ külső élet. Ennek elforgatottjaira egy-egy színt felhasználva az összes külső és belső él kiszínezhető $2k - 1$ színnel.

Mindkét esetben $\mathbf{W} = n = \Delta = \mathbf{L}$, ami a 3.2.1. lemma alapján optimális. \square



7. ábra.

A teljes gráf egy olyan független élhalmaza, melynek elforgatottjai egyrétűen fedik le a teljes élhalmazt. Az $n = 2k - 1$ esetben a középső pont és a függőleges él nem része a gráfnak.

5.3.2. Maximális átvitel

5.3.2. Állítás. Egy $n + 1$ pontú irányítatlan csillagon az all-to-all igényhalmaznál a maximális átvitel problémája $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}^+$ színnel hatékonyan megoldható, továbbá a \mathbf{W} színnel kielégíthető igények maximális száma $\lfloor (\mathbf{W} + 1) \frac{n}{2} \rfloor$.

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy $\lfloor (\mathbf{W} + 1) \frac{n}{2} \rfloor$ igénynél több nem elégíthető ki \mathbf{W} színnel. Tekintsük az igényeknek egy tetszőleges \mathbf{W} színnel kielégített $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ részhalmazát. Ennek megfeleltethető a szakasz bevezetésében említett \mathcal{G} gráf éleinek egy \mathbf{W} színnel színezett részhalmaza, melyben K_i -vel ill. B_i -vel jelöljük a c_i színnel színezett külső ill. belső éleket, $i = 1, \dots, \mathbf{W}$. Az i -ik színosztály élei független élhalmazt alkotnak, amelyben a belső élek csak a külső élek által nem érintett v_j pontokra illeszkehetnek, ezért

$$|B_i| \leq \lfloor \frac{n - |K_i|}{2} \rfloor,$$

minden $i = 1, \dots, \mathbf{W}$ esetén.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}'| &= \sum_{i=1}^{\mathbf{W}} (|K_i| + |B_i|) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\mathbf{W}} (|K_i| + \lfloor \frac{n - |K_i|}{2} \rfloor) \\
&= \sum_{i=1}^{\mathbf{W}} \lfloor \frac{n + |K_i|}{2} \rfloor \\
&\leq \lfloor \sum_{i=1}^{\mathbf{W}} \frac{n + |K_i|}{2} \rfloor \\
&\leq \lfloor (\mathbf{W} + 1) \frac{n}{2} \rfloor,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség abból adódik, hogy összesen n külső él van.

Másrészt megmutatjuk, hogy létezik $\mathcal{I}^* \subseteq \mathcal{I}_a$, mely W színnel színezhető és $|\mathcal{I}^*| = \lfloor (\mathbf{W} + 1) \frac{n}{2} \rfloor$. Ha $n = 2k$ (páros), akkor az első színosztályba vegyük fel az összes külső élt, a maradék $\mathbf{W} - 1$ színosztályba a 7. ábrán berajzolt belső éleknek $\mathbf{W} - 1$ elforgatottját. Ez összesen $n + (\mathbf{W} - 1) \frac{n}{2} = (\mathbf{W} + 1) \frac{n}{2}$ él.

Ha $n = 2k - 1$ (páratlan), akkor

$$\lfloor (\mathbf{W} + 1) \frac{n}{2} \rfloor = (\mathbf{W} - 1) \frac{n + 1}{2} + (n - (\mathbf{W} - 1)) + \lfloor \frac{\mathbf{W} - 1}{2} \rfloor.$$

Tekintsük a 7. ábrán berajzolt vízszintes belső éleket és a $\{v_{2k-1}, v'_{2k-1}\}$ külső éleket. Ennek a független élhalmaznak szimmetrikusan balra-jobbra törtenő $\mathbf{W} - 1$ elforgatottját színezzük az első $\mathbf{W} - 1$ színnel (ez összesen $(\mathbf{W} - 1) \frac{n+1}{2}$ él). Az utolsó színosztályba vegyük fel az eddig ki nem színezett $n - (\mathbf{W} - 1)$ külső éleket, és az ezektől független $\lfloor \frac{\mathbf{W}-1}{2} \rfloor$ vízszintes éleket. Ennyi ténylegesen található, mivel az elforgatásokat szimmetrikusan végeztük. \square

5.3.3. Maximális értékű átvitel

5.3.3. Állítás. *Egy irányítatlan csillagban, a rögzített \mathcal{I}_a igényhalmaz és $\mathbf{W} = 3$ színszám ill. tetszőleges $f : \mathcal{I}_a \rightarrow \mathbf{R}^+$ értékfüggvény esetén a maximális értékű átvitel probléma NP-nehéz.*

Bizonyítás: Tetszőleges $\mathcal{G}(V, E)$ egyszerű gráf éleinek 3 színnel színezhetősége NP-nehéz feladat [16], ezt fogjuk visszavezetni problémánkra.

Az 5.1.1. lemma alapján tetszőleges $\mathcal{G}(V, E)$ egyszerű gráfhoz konstruálható olyan $|V| + 1$ pontú csillag és \mathcal{I} igényhalmaz, melynek útszínezése ekvivalens a gráf éleinek színezésével. Mivel \mathcal{G} egyszerű, \mathcal{I} nem tartalmaz párhuzamos igényeket, ezért \mathcal{I} kiegészíthető az \mathcal{I}_a igényhalmazzá. Az $i \in \mathcal{I}_a$ igényeken értelmezzük az alábbi értékfüggvényt:

$$f(i) := \begin{cases} 1 & \text{ha } i \in \mathcal{I} \\ \epsilon = \frac{1}{|V|^2} & \text{különben.} \end{cases}$$

A maximális értékű átvitel összértéke az $f(\cdot)$ értékfüggvény mellett pontosan akkor nem kisebb $|E|$ -nél, ha az összes E -beli él 3 színnel színezhető, ugyanis az ϵ súlyú igények összsúlya kisebb egynél. \square

5.4. Útszínezés az irányított esetben

A fejezet elején bemutattuk, hogy az irányított útszínezési feladat csillagok esetén páros gráf élszínezésére vezethető vissza, ami nagy könnyebbséget jelent az irányítatlan esethez képest. Az optimális színezés kapcsán vázoljuk a magyar módszert használó, páros gráfok élszínezésére szolgáló, ismert eljárást. Saját eredmény a maximális értékű átvitel megoldására szolgáló polinom idejű eljárás. Az állítást itt súlyozott matroid metszet algoritmus felhasználásával bizonyítjuk. Marx Dániel ugyanezt az eredményt egészértékű lineáris programozás alkalmazásával igazolta hasonlóan a láncoknál látottakhoz.

5.4.1. Optimális színezés

5.4.1. Állítás. *Irányított csillagoknál tetszőleges \mathcal{I} igényhalmazt $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ színnel hatékonyan ki lehet elégíteni.*

Bizonyítás: Az 5.1.2. lemma alapján elegendő a $\mathcal{P}(A, B, E)$ páros gráf éleit színezni. \mathcal{P} maximális fokszáma \mathbf{L} és $|A| = |B|$, ezért élek hozzá vételével a gráf kiegészíthető \mathbf{L} -regulárisrá.

A kiegészített gráfban tetszőleges $\emptyset \neq A' \subseteq A$ esetén $|B'| \geq |A'|$, ahol B' -vel A' szomszédait jelöltük, különben az \mathbf{L} -regularitásból adódóan B' tartalmazna egy \mathbf{L} -nél nagyobb fokú pontot. Így Hall-tételét alkalmazva \mathcal{P} -ben

van teljes párosítás, melyet König magyar módszerével hatékonyan megtalálhatunk [1].

A teljes párosítás éleit elhagyva egy $(\mathbf{L} - 1)$ -reguláris gráfhoz jutunk, amiben a fenti gondolatmenet alapján szintén található egy teljes párosítás... Ezzel az eljárással a kiegészített gráfunk éleit \mathbf{L} teljes párosításra particionáljuk, melyeket egy-egy színnel színezve a kiegészített gráffal együtt az eredeti \mathcal{P} gráf éleit is \mathbf{L} színnel színeztük ki.

Figyelembe véve a 3.2.1. lemmát az \mathbf{L} színt használó színezésünk optimális. \square

5.4.2. Maximális értékű átvitel

5.4.2. Állítás. *Irányított csillagoknál tetszőleges \mathcal{I} igényhalmaz, $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^+$ értékfüggvény és $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}^+$ színszám esetén a maximális értékű átvitel probléma megoldására létezik polinom idejű algoritmus.*

Bizonyítás: A feladat úgy is fogalmazható az 5.1.2. lemma felhasználásával, hogy egy $\mathcal{P}(A, B, E)$ páros gráf súlyozott élei közül szeretnénk maximális súlyú \mathbf{W} színnel színezhető részhalmazt találni. Az előző az 5.4.1. állítás bizonyításában láttuk, hogy páros gráfoknál a \mathbf{W} színnel színezhetőség egyenértékű azzal, hogy $\Delta \leq \mathbf{W}$, ahol Δ a kiválasztott élek által meghatározott részgráf maximális fokszáma.

Tekintsük az éleknek egy $E = E_{a_1} \dot{\cup} E_{a_2} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} E_{a_n}$ partícióját, ahol E_{a_i} az $a_i \in A$ pontra illeszkedő élek halmaza. Definiáljuk az $\mathcal{M}_A = (E, \mathcal{F})$ matroidot, ahol $E' \in \mathcal{F}$ akkor és csak akkor, ha $|E' \cap E_{a_i}| \leq \mathbf{W}$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén. (Az így definiált halmazrendszer egy partíciós matroid, mely kielégíti a matroid axiómákat. [29]) Hasonlóan a B -beli pontokra való illeszkedés alapján elkészíthetjük az \mathcal{M}_B matroidot. \mathcal{M}_A -ban ill. \mathcal{M}_B -ben pontosan azok az élhalmazok függetlenek, melyeknek A ill. B -beli pontokon legfeljebb \mathbf{W} a foka. Így a feladatunk maximális súlyú közös független élhalmaz keresése az \mathcal{M}_A és \mathcal{M}_B matroidokban. Figyelembe véve, hogy \mathcal{P} konstruálása, a függetlenségi orákulumok és a maximális közös független élhalmaz keresése polinom időben megvalósítható, adódik az algoritmus hatékonysága [29]. \square

5.5. Összefoglalás

A csillagokról sok fontos megállapítást tettünk. A problémák egy részére hatékony algoritmus adható, másokról belátható, hogy **NP**-nehéz. Az irányított és irányítatlan esetek nehézsége és megoldhatósága számos esetben nagymértékben különbözik, mint ahogy az az alábbi táblázatból is leolvasható.

Csillagok, \mathcal{I} igényhalmaz				
	Optimális színezés	Közelítés	Legrosszabb esetben optimális	$\mathbf{W}_{L,\min}$
irányítatlan	NP -nehéz	$\lfloor 1.1\mathbf{W}_{\min} + 0.8 \rfloor$	hatékony algoritmus	$\mathbf{W}_{L,\min} = \frac{3}{2}\mathbf{L}$
irányított	hatékony algoritmus	–	–	$\mathbf{W}_{L,\min} = \mathbf{L}$

Csillagok, \mathcal{I} igényhalmaz				
	$\mathbf{W} = 1$ hullámhossz		$\mathbf{W} = k$ hullámhossz	
	Maximális átvitel	Maximális értékű átvitel	Maximális átvitel	Maximális értékű átvitel
irányítatlan	max. párosítás	max. értékű párosítás	NP -nehéz	NP -nehéz
irányított	max. párosítás páros gráfban	max. értékű párosítás páros gráfban	matroid metszet, LP	súlyozott matroid metszet, LP

Csillagok \mathcal{I}_a , igényhalmaz				
	$\mathbf{W} = 1$ hullámhossz		$\mathbf{W} = k$ hullámhossz	
	Maximális átvitel	Maximális értékű átvitel	Maximális átvitel	Maximális értékű átvitel
irányítatlan	triviális (= szomszédok)	max. értékű párosítás	P idejű konstrukció	NP -nehéz
irányított	triviális (= szomszédok)	max. értékű párosítás páros gráfban	matroid metszet, LP	súlyozott matroid metszet, LP

6. Fák

Fa alakú hálózatokban bármely két pont között egy út van. Gyakorlati szempontból ebben rejlik nagy hibájuk, mivel védelem kialakítására nincsen lehetőség. Ugyanakkor elméleti szempontból ez teszi őket könnyen kezelhetővé. Az útelvezetés problémája nem merül fel, és útszínezési szempontból is említésre érdemes egy nagy könnyebbség. Egy pontot érintő összes útról csak a ponthoz illeszkedő éleken előforduló útmetszetekből az összes színezési kényszer leolvasható, hiszen két egymást nem metsző út másutt már nem találkozhat össze. Mind az irányított mind az irányítatlan esetekben ismertetett színezési eljárások ezt a gondolatot használják fel.

6.1. Irányítatlan eset

Irányítatlan fákban utak egy halmazának színezésével WDM hálózatoktól függetlenül többen is foglalkoztak. A fák és csillagok útszínezésének kapcsolatát többen egymástól függetlenül is felfedezték: Golumbic és Jamison a [15] illetve WDM hálózatok kapcsán Raghavan és Upfal a [27] műben publikálta.

6.1.1. Szoros kapcsolat a csillagokkal

A bevezetőben leírt gondolatmenet segítségével egyszerűen felhasználhatjuk a csillagoknál kapott közelítési eljárásokat. Adott egy $(\mathcal{F}(V, E), \mathcal{I})$ útszínezési feladat, ahol \mathcal{F} egy irányítatlan fa alakú hálózat, és \mathcal{I} egy rajta értelmezett igényhalmaz. Minden $v \in V$ -hez konstruálunk egy $(\mathcal{S}_v, \mathcal{I}_v)$ *lokális feladatot*, ahol \mathcal{S}_v a v pontból és a rá illeszkedő \mathcal{F} -beli élekből álló csillag, \mathcal{I}_v az összes v -t érintő \mathcal{I} -beli utat (pontosabban annak \mathcal{S}_v -be eső részét) tartalmazza.

6.1.1. Lemma. *Az $(\mathcal{F}(V, E), \mathcal{I})$ útszínezési feladathoz minden $v \in V$ pontra adott az $(\mathcal{S}_v, \mathcal{I}_v)$ lokális problémának \mathbf{W}_v színt használó megoldása. Ezek felhasználásával polinom sok lépésben kielégíthetjük \mathcal{I} igényeit $\mathbf{W} = \max_{v \in V} \mathbf{W}_v$ szín felhasználásával.*

Bizonyítás: Az \mathcal{F} fa egy szélességi bejárása v_1, v_2, \dots, v_n sorrendben látogatja meg a pontokat. Először kiszínezzük a v_1 -hez illeszkedő utakat, majd a v_2 -höz illeszkedő még színezetlen utakat, stb. A színezés során egy utat csak egyszer színezzük ki, később azon már nem változtatunk.

Az első színezést az $(\mathcal{S}_{v_1}, \mathcal{I}_{v_1})$ lokális feladat megoldása adja. A szélességi bejárás során a v_{i+1} pontból alacsonyabb indexűbe csak a v_i ponton keresztül

vezet út. Ezért ha az első i színezést már elvégeztük $\mathbf{W} = \max_{j=1,\dots,i} \mathbf{W}_{v_j}$ szín felhasználásával, akkor a v_{i+1} -et érintő igények közül pontosan azok kiszínezettek, amelyek keresztül mennek a v_i, v_{i+1} élen. Ezek az igények az eddigi színezésben is és az $(i+1)$ -ik lokális színezésben is mind különböző színűek, ezért a v_{i+1} -et érintő utak egyszerűen a színek átnevezésével színezhetőek. Sőt a $\{v_i, v_{i+1}\}$ élen elő nem forduló már felhasznált színek újrafelhasználhatóak, így együttesen $\mathbf{W} = \max_{j=1,\dots,i+1} \mathbf{W}_{v_j}$ szín elegendő. \square

A következő lemma nyilvánvaló következménye az előzőnek.

6.1.2. Lemma. *Ha egy irányítatlan $(\mathcal{F}(V, E), \mathcal{I})$ útszínezési feladat esetén minden $v \in V$ -re az $(\mathcal{S}_v, \mathcal{I}_v)$ lokális feladatokban az optimális színezés $\mathbf{W}_{\min, v}$ színt használ, akkor \mathcal{F} -ben $\mathbf{W}_{\min} = \max_{v \in V} \mathbf{W}_{\min, v}$.* \square

6.1.2. Optimális színezés

Mivel a csillagok is fák, és az optimális színezés az 5.2.1. állítás szerint már csillagok esetében is **NP**-nehéz, a fák esetében is az.

6.1.1. Állítás. *Egy irányítatlan fa alakú hálózaton értelmezett igényhalmaznál az optimális színezés eldöntési változata még a $\mathbf{W} \geq 3$, rögzített bemenet esetben is **NP**-nehéz.* \square

Az **NP**-nehézség belátása után közelítő eljárásokat mutatunk, melyek a 6.1.1. és a 6.1.2. lemmákból ill. a csillagok színezéséről szóló az 5.2.2. és az 5.2.4. állításokból következnek. Legyen \mathcal{F} egy irányítatlan fa és \mathcal{I} egy rajta értelmezett igényhalmaz.

6.1.2. Állítás. *Tetszőleges $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ feladatnál \mathcal{I} igényei $\mathbf{W} = \frac{3}{2}\mathbf{L}$ színnel hatékonyan kielégíthetőek.* \square

6.1.3. Állítás. *Tetszőleges $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ feladatnál \mathcal{I} igényei $\mathbf{W} = \lfloor 1.1\mathbf{W}_{\min} + 0.8 \rfloor$ színnel hatékonyan kielégíthetőek.* \square

Az 5.2.3. állítás most nem használható sikerrel, mert az egyes lokális színezéseknél a fában nem párhuzamos igények is párhuzamosak lehetnek. Így a lokális színezések több mint $\mathbf{L} + m$ színt használhatnak, ahol m a fában előforduló legtöbb párhuzamos igény.

A legrosszabb esetben optimalizálás problémája fáknál is megoldott. A következő állításban $\Delta_{\mathcal{F}}$ az \mathcal{F} fa maximális foksámát jelöli.

6.1.4. Állítás. *Tetszőleges irányítatlan \mathcal{F} fa esetén*

$$\mathbf{W}_{\mathbf{L},\min} = \begin{cases} \frac{3}{2}\mathbf{L} & \text{ha } \Delta > 2 \\ \mathbf{L} & \text{különben} \end{cases}$$

és a legrosszabb esetben optimális színszámmal hatékonyan lehet színezni.

Bizonyítás: Egyrészt a 6. ábra (ld. 29. oldal) igényhalmaza –ahol a be rajzolt igények $\frac{\mathbf{L}}{2}$ vastag igénykötegek– minden olyan fán kialakítható, aminek van kettőnél nagyobb foksámú pontja, és kielégítéséhez szükség van $\frac{3}{2}\mathbf{L}$ színre. Másrészt a 6.1.2. állítás alapján tetszőleges igényhalmazt ennyi színnel hatékonyan lehet színezni.

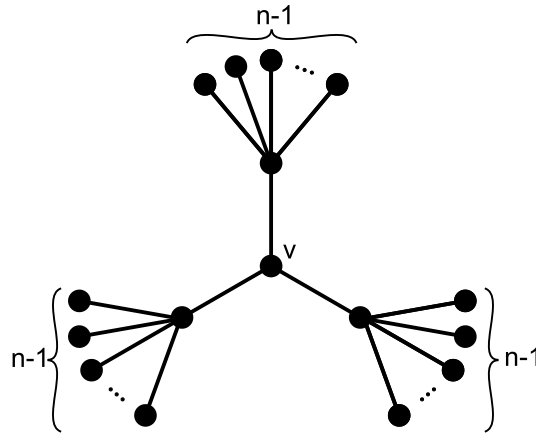
A kettőnél nagyobb foksámú pontot nem tartalmazó fák láncok, melyekre a 4.1.1. tételéből adódik az állítás. \square

6.1.3. All-to-all kommunikáció

Irányítatlan fáknál az all-to-all kommunikáció problémája nyitott kérdés, melyet már több szerző is megemlített cikkeiben [2]. Egyelőre megválaszolatlan \mathbf{W}_{\min} meghatározásának komplexitása tetszőleges $(\mathcal{F}, \mathcal{I}_a)$ esetén.

A 6.1.2. lemma segítségével a feladat visszavezethető csillagok színezésére, majd az 5.1.1. lemma segítségével irányítatlan gráfok élszínezésére. Egy ilyen \mathcal{G} gráf mindig előáll a következőképpen: \mathcal{G} pontjaihoz pozitív egész súlyokat írunk, két pont között pontosan annyi él van, amennyi a pontba írt számok szorzata. (Valójában \mathcal{G} egy lokális színezésben csak a kettő hosszú igényekhez rendelt gráf, azonban az egy hosszú igények színezése nem okoz problémát.)

\mathcal{G} egyszerű szerkezete ellenére élszínezése megoldatlan probléma. A csillagoknál és a későbbiekben tárgyalt irányított fákról szóló eredmény azt sugallná, hogy $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ színnel színező eljárást keressünk, azonban a következő eredmény ennek ellentmond.



8. ábra.

Egy irányítatlan fa, melyen az all-to-all igényhalmaz kielégítéséhez legalább $3n^2$ szín szükséges.

6.1.5. Állítás. Irányítatlan fa alakú hálózatoknál, az all-to-all \mathcal{I}_a igényhalmaz esetén a $\frac{W_{\min}}{L}$ hányados értéke $\frac{3}{2}$ -et tetszőlegesen megközelítheti.

Bizonyítás: Tekintsük a 8. ábrán lerajzolt hálózaton az \mathcal{I}_a igényhalmazt. A v pontot érintő, de nem ott végződő utak száma $3n^2$, ezeket mind különböző színűre kell színeznünk. Az $L = 2n^2 + n$ egyenletből, és a $\frac{3}{2}L$ színt használó színezésből látszik, hogy $\frac{3}{2} \geq \frac{W_{\min}}{L} \geq \frac{3n^2}{2n^2+n}$. Az $n \rightarrow \infty$ határátmenet esetén, $\frac{W_{\min}}{L} \rightarrow \frac{3}{2}$. \square

6.2. Irányított eset

Korábban az irányított szimmetrikus fák útszínezése egy elméleti szempontból érdektelen speciális eset volt. Ezt a területet csak az 1990-es évek elejétől kezdték vizsgálni WDM-hálózatok kapcsán. Az NP-nehézséget bizonyító állítások Erlebach és Jansen eredményei [9, 7], melyeket itt is részletesen ismertetünk. A közelítő eljárások alapötlete Mihail, Kaklamanis és Raotól származik [21]. Fontos eredménynek tartjuk, hogy a Gargano, Hell, és Pórennes által a [12] cikkben csak vázlatosan publikált all-to-all kommunikációt itt részletesen tárgyaljuk.

6.2.1. Az optimális színezés bonyolultsága

Irányítatlan fák útszínezése nem nehezebb irányítatlan csillagok útszínezésénél, és azt is beláttuk, hogy az irányított csillagok hatékonyan színezhetőek $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ színnel. A kapott eredmények után azt remélhetnénk, hogy az optimális színezés irányított fáknál is polinom időben megoldható $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ színnel. Először reményünknek azt a részét cáfoljuk, mely szerint tetszőleges igényhalmaz kielégíthető $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ színnel. Tekintsük a 4. ábrán vázolt példát (lásd 13. oldal). A berajzolt öt igényből álló igényhalmaz konfliktus gráfja egy öt hosszú kör, ezért $\mathbf{W}_{\min} = 3$, ugyanakkor a terhelés $\mathbf{L} = 2$.

Adott egy $\mathcal{G}(V, E)$ gyűrű alakú gráf, $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$ és $E = \{\{i, i+1 \pmod{n}\} \mid i = 0, 1, \dots, n-1\}$. A gyűrűben egy utat *ívnek*, utak egy halmazát *ívhalmaznak* nevezzük és \mathcal{A} -val jelöljük (az angol „arc” szó után). Egy ívhalmaz egy színezése *érvényes*, ha a közös éllel rendelkező ívekhez különböző szint rendel. *Ívszínezési problémának* nevezzük annak eldöntését, hogy egy adott \mathcal{G} gyűrű, \mathcal{A} ívhalmaz és $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}^+$ esetén létezik-e az ívhalmaznak \mathbf{W} szint használó érvényes színezése. A feladat komplexitásáról szóló tételt nem bizonyítjuk.

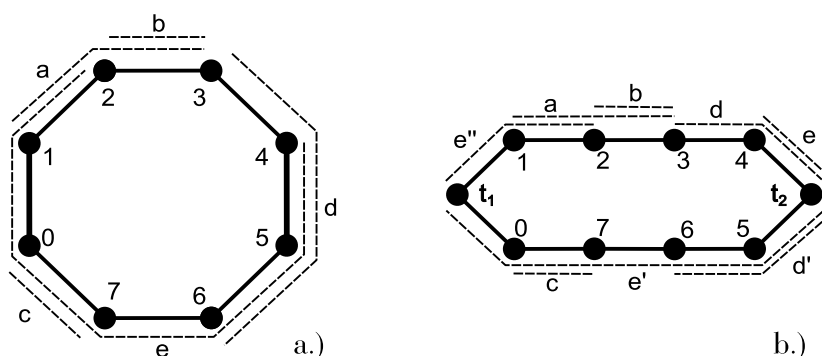
6.2.1. Tétel. *Az ívszínezési probléma NP-teljes. [13]* □

Rövid kitérő után visszatérünk az irányított fák optimális színezéséről szóló negatív állításra. Nem az optimális színezésről, hanem annak eldöntési változatáról mutatjuk meg, hogy NP-nehéz.

6.2.2. Tétel. *Tetszőleges szimmetrikus irányított fa, \mathcal{I} igényhalmaz és $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}^+$ esetén annak eldöntése, hogy \mathcal{I} kielégíthető-e \mathbf{W} színnel NP-nehéz.*

1. Bizonyítás: A bizonyítás során az NP-teljes ívszínezési problémát vezetjük vissza az útszínezésre. Tetszőleges $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ és $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}^+$ ívszínezési feladathoz polinom időben konstruálunk egy vele ekvivalens $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ feladatot. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a gyűrűnek páros sok pontja van. A konstrukciót egy példán keresztül mutatjuk meg, melyet a 9. ábra a.) részén vázoltunk: $n = 8$ a gyűrű hossza, $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e\}$ az ívhalmaz.

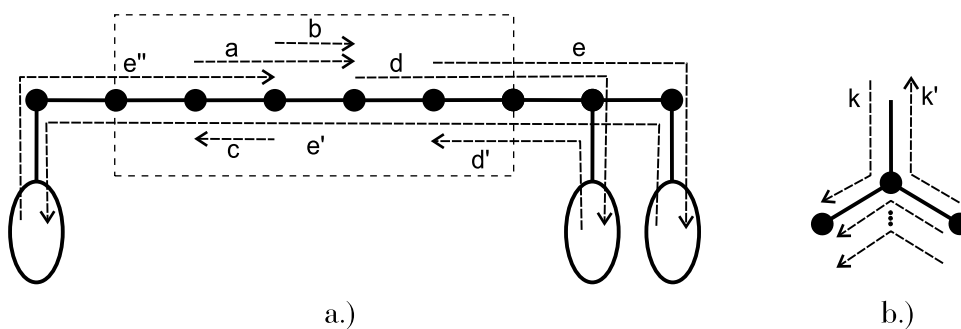
Az egymással szemben lévő $\{0, 1\}$ ill. $\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\}$ éleken (az a.) ábrán megvastagítottuk ezeket az éleket) felvesszük t_1 és t_2 töréspontokat. Majd a gyűrűt összelapítjuk a t_1 és t_2 pontok széthúzásával. A lapítás eredményeként



9. ábra. Egy ívszínezési feladat tördelése két láncon felmerülő feladattá.

megtört íveket a töréspontok mentén kettő, esetleg három részre bontjuk. A 9. ábra b.) részén a d ívet kettő, az e ívet három részre bontjuk.

A lapított gyűrűnek és az esetlegesen darabolt íveknek egy $\frac{n}{2} + 2$ hosszú kétirányú láncot és igényeket feleltetünk meg, ahol a felülre került íveket balról jobbra mutató igényekkel, az alulra kerülteket jobbról balra mutatókkal helyettesítjük. (A 10. ábra a.) részén ezt a láncot szaggatottan bekereteztük.) A láncban berajzolt igények és az összelapított ívszínezési feladat íveire ekvivalensek a színezési kényszerek.



10. ábra.

A láncon felmerülő igények meghosszabbítása és másolókba vezetése az a.) részen, az egyes másolók felépítése a b.) részen látható.

A lánc t_1 és t_2 végeit olyan hosszú láncsal töldjük meg, ahány ívet kettőtörtünk a megfelelő töréspontnál. A meghosszabbított láncrészek pontjai-

hoz egy-egy *másolót* illesztünk és a kettétört íveknek megfelelő igénypárokat külön-külön egy-egy másolóig meghosszabbítjuk és belevezetjük (a 10. ábra *a.*) része).

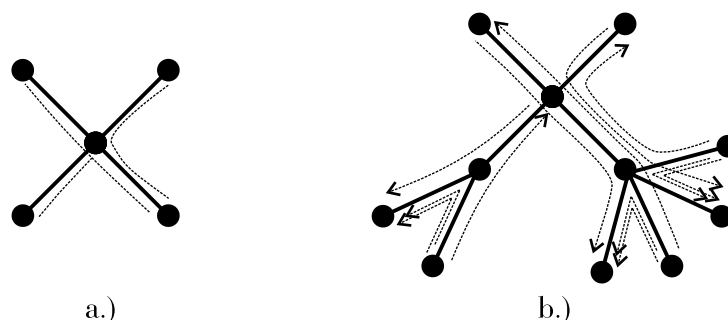
A másoló felépítése az a 10. ábra *b.*) részén látható, ahol k ill. k' az egymással ellentétes irányú *másolandó igénypár*, továbbá az ábrának megfelelően tartalmaz még $\mathbf{W} - 1$ párhuzamos *másoló* igényt.

A kialakított hálózat \mathcal{F} , az íveknek és ívtöréseknek megfelelően, valamint a másoló igények alkotják \mathcal{I} igényhalmazt. Ha \mathcal{I} igényei kielégíthetők \mathbf{W} színnel, akkor egy másolón belül lévő másoló igények mind különböző színűek ($\mathbf{W} - 1$ szín), ezért a másolandó igénypár igényei megegyező színűek, tehát $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ ívszínezési feladat is megoldható \mathbf{W} színnel.

Tegyük fel, hogy \mathcal{A} ívei színezhetőek \mathbf{W} színnel. Ekkor egy ívnek megfelelően összes (a törések miatt 1, 2 vagy 3) igény színezhető az ív színére. A másolóba beérkező másolandó igénypár igényei azonos színűek, ezért a másoló igények színezésére marad $\mathbf{W} - 1$ szín, tehát \mathcal{I} igényei is kielégíthetők \mathbf{W} színnel. \square

2. Bizonyítás: Az 5.2.1. állítás kimondja, hogy irányítatlan csillagon felmerülő útszínezési probléma NP-nehéz. Ennek eldöntési változatát vezetjük vissza irányított szimmetrikus fák útszínezésére. Adott egy \mathcal{S} irányítatlan csillag, egy rajta értelmezett \mathcal{I} igényhalmaz és egy $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}^+$ szám. \mathcal{S} minden éle és \mathcal{I} minden igénye helyett vegyünk fel két párhuzamos, de ellentétes irányítású élet ill. igényt. Minden igénypár egyik vége egy elsőfokú pont. Illesszünk az ilyen elsőfokú pontokhoz igénypáronként egy másolót, melyet az előző bizonyításban ismertettünk, és vezessük bele a másolandó igénypárt a másolóba. A konstrukciót egy egyszerű példán szemléltetjük a 11. ábrán, ahol az illesztett másolókat bekarikáztuk. Az előző bizonyításhoz hasonlóan adódik, hogy az így elkészített fán értelmezett igényhalmaz akkor és csak akkor \mathbf{W} színnel színezhető, ha az \mathcal{I} útjai is \mathbf{W} színnel kielégíthetőek \mathcal{S} -ben. \square

A bizonyításokban konstruált fák speciális szerkezetűek: az első bizonyításban szereplő \mathcal{F} fának maximális fokszáma $\Delta_{\mathcal{F}} \leq 3$, és a másodikban szereplő fa átmérője $d_{\mathcal{F}} \leq 4$. Továbbá irányítatlan csillagoknál már a három színnel színezhetőség is NP-nehéznek adódott, ezért a második bizonyítás $\mathbf{W} \geq 3$ rögzített bemenet esetén is érvényes.



11. ábra.

Az *a.)* rész egy irányítatlan csillagon értelmezett útszínezési feladat, a *b.)* rész annak visszavezetése egy irányított fán felmerülő problémára.

6.2.3. Tétel. A $\Delta_{\mathcal{F}} \leq 3$ maximális fokszámú szimmetrikus irányított fákon, tetszőleges \mathcal{I} igényhalmaz esetén az optimális színezés problémája **NP**-nehéz.
□

6.2.4. Tétel. A $d_{\mathcal{F}} \leq 4$ átmérőjű irányított szimmetrikus fákon, tetszőleges \mathcal{I} igényhalmaz esetén az optimális színezés eldöntési változata a $\mathbf{W} \geq 3$ rögzített bemenet esetén is **NP**-nehéz. □

6.2.2. Az optimálist közelítő színezés

Ebben a szakaszban bizonyítás nélkül összegezzük az irányított szimmetrikus fák hatékony közelítő útszínezéséről eddig feltárt eredményeket.

Fák esetén egy algoritmust mohó útszínezési eljárásnak nevezünk, ha bármely $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ útszínezési probléma esetén

- \mathcal{F} pontjait egy $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sorrendben bejárja;
- a bejárásra teljesül, hogy bármely v_i pontnak legfeljebb egy alacsonyabb indexű szomszédja van;
- az eljárás v_i pont bejárásakor lokális színezést végez, azaz a pontot érintő színezetlen utakat színezi ki, és a korábbi színezéseket változatlanul hagyja.

Az irányítatlan fák csillagokon alapuló színezései is ilyen mohó útszínezési eljárások voltak. Ott az okozta a problémát, hogy a lokális színezéseket csillagokban csak közelíteni tudtuk, viszont az előre kiszínezett igények gyakorlatilag semmilyen további megkötést nem jelentettek. Az irányított esetben ez pont fordítva van. Az egyes lokális színezések egymástól függetlenül hatékonyan elvégezhetőek lennének minimális színszámmal (az 5.4.1. állítás), de az előre kiszínezettség itt már valódi nehézséget okoz. Ugyanis egy pont és szomszédja között két (ellentétes irányítású) él van, így az előre kiszínezett utak között előfordulhatnak azonos színűek is.

Egy lokális színezés most is egy csillagon történik, ami az 5.1.2. lemma alapján átfogalmazható egy \mathcal{P} páros gráf élszínezésére. A korábban kiszínezett utak úgy jelentkeznek, hogy a j szülőnek a lemma bizonyításában megfeleltetett O_j és I_j pontokra illeszkedő élek előre színezettek.

6.2.5. Tétel. *Tetszőleges szimmetrikus irányított \mathcal{F} fa és \mathcal{I} igényhalmaz esetén létezik hatékony mohó útszínezési eljárás, mely*

- 1.) *összesen legfeljebb $\lceil \frac{5}{3}\mathbf{L} \rceil$ színt, és*
- 2.) *bármely egymással szembe menő élpár élein átmenő igényekre legfeljebb $\lceil \frac{4}{3}\mathbf{L} \rceil$ színt használ.*

[20]

□

A 2.) feltétel jelentősége abban van, hogy egy v ponthoz tartozó lokális színezéskor az előre kiszínezett utakból adódó színezési kényszereket korlátozza. Az algoritmus gyakorlatban is hatékonyan implementálható, azonban a bizonyítás sok eset vizsgálatát igényli, amelyeket itt nem részletezünk.

A 6.2.5. tétel nem az első közelítő eljárás az irodalomban, a [21] és a [23] cikkekben hasonló algoritmusokat mutatnak, a tételbeli az 1.) és 2.) pontokban nagyobb konstansokat tartalmazva. A következő tételből kiderül, hogy a két konstansra ez a kapható legjobb eredmény mohó útszínezések körében.

6.2.6. Tétel. *Bármely mohó útszínezési eljáráshoz és $\epsilon > 0$ -hoz létezik egy $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ feladat, ahol \mathcal{I} színezésére legalább $\frac{5}{3}\mathbf{L} - \epsilon$ színt használ az eljárás, és lesz a hálózatnak egy egymással szembe menő élpárja, melyeken legalább $\frac{4}{3}\mathbf{L} - \epsilon$ szín fordul elő összesen. [20]*

□

6.2.3. Legrosszabb esetben optimális színezés

A legrosszabb esetben optimális színezés problémája irányított fáknál megoldatlan, azaz $\mathbf{W}_{L,\min}$ -re nem mindig tudunk pontos értéket mondani, és az sem ismert általában, hogy a színezés NP-nehéz vagy polinom idejű. Ebben a szakaszban összefoglaljuk a problémáról eddig kapott eredményeket.

Először a legrosszabb esetet vizsgáljuk. Legyen L négyvel osztható, és tekintsük a 4. ábra a.) részét (lásd 13. oldal), ahol az \mathcal{I} igényhalmaz mindegyes berajzolt igény helyén most $\frac{L}{2}$ párhuzamos igényt tartalmaz.

6.2.1. Állítás. *A 4. ábra a.) részén lévő hálózaton, az \mathcal{I} igényhalmaz esetén $\mathbf{W}_{\min} = \frac{5}{4}L$.*

Bizonyítás:

Egy érvényes színezésnél bármely szint legfeljebb két igény kiszínezésére használhatjuk. A kiszínezendő igények száma $\frac{5}{2}L$, tehát $\mathbf{W}_{\min} \geq \frac{5}{4}L$.

Jelöljük a színeket $\{1, 2, \dots, \frac{5L}{4}\}$ számokkal. Az 1. igénycsoport igényeit $\{1, 2, \dots, \frac{L}{2}\}$ -re, a 2.-ét $\{\frac{L}{2}+1, \frac{L}{2}+2, \dots, L\}$ -re, a 3.-ét $\{L+1, L+2, \dots, \frac{5L}{4}, 1, 2, \dots, \frac{L}{4}\}$ -re a 4.-ét $\{\frac{L}{4}+1, \frac{L}{4}+2, \dots, \frac{3L}{4}\}$ -re és az 5.-ét $\{\frac{3L}{4}+1, \frac{3L}{4}+2, \dots, \frac{5L}{4}\}$ -re színezzük. Így az igényhalmaznak egy $\frac{5}{4}L$ szint használó érvényes színezéséhez jutunk.

□

6.2.2. Állítás. *Az olyan fa alakú hálózatoknál, ahol legalább két kettőnél nagyobb fokszámú pont van, tetszőleges $L \in \mathbf{Z}^+$ terhelésnél $\lceil \frac{5}{4}L \rceil \leq \mathbf{W}_{L,\min} \leq \lceil \frac{5}{3}L \rceil$*

Bizonyítás: Az alsó becslés abból adódik, hogy tetszőleges ilyen fán kialakítható a 4. ábra a.) részén szereplő L terhelésű igényhalmaz, melyre alkalmazhatjuk a 6.2.1. állítást. A felső becslést a 6.2.5. tétel alapján nyerjük.

□

6.2.3. Állítás. *Az olyan \mathcal{F} fákon, melyeken legfeljebb egy kettőnél nagyobb fokszámú pont van, tetszőleges \mathcal{I} igényhalmaz $\mathbf{W}_{\min} = L$ színnel hatékonyan színezhető.*

Bizonyítás: Ha nincs a fában kettőnél nagyobb fokszámú pont, akkor a fa egy lánc, melyre 4.1.1. tételből adódik az állítás. Jelöljük a kettőnél nagyobb fokszámú pontot v -vel. Először kiszínezzük a v pontot érintő utakat

az 5.4.1. állításban leírt lokális színezéssel. Egy v ponthoz érintkező irányított lánc felbontható v felé és v -vel ellentétes irányba mutató láncokra, melyek egymástól függetlenül színezhetők. A lokális színezésből adódó kötöttségek is csak annyit jelentenek, hogy a v felé haladó (felől érkező) igények előre színezettek. Mivel ezek a csillagban is és az egyirányú láncokban is különböző színűre színezettek, a láncok színezésekor ez nem jelent semmilyen megkötést, így a 4.1.1. tétel segítségével adódik az állítás. \square

Egyelőre nyitott kérdés a legalább két kettőnél nagyobb foksámú pontot tartalmazó fákon léteznek-e rosszabbul színezhető igényhalmazok az említett példánál. Két kisebb előrelépést említünk meg a kérdés megválaszolásában. Egyrészt Jansen a [18] cikkben mutatott egy példát, melyre $\mathbf{L} = 3$ és $\mathbf{W}_{\min} = 5$. Azonban ez az igényhalmaz nem alakítható ki minden legalább két kettőnél nagyobb foksámú pontot tartalmazó fán, ezért a 6.2.2. állítás alsó becslését még az $\mathbf{L} = 3$ esetben sem javítja meg. Másik előrelépés az a saját eredmény, mely szerint az a 4. ábra $a.$) részén lévő hálózaton tetszőleges igényhalmaz $\frac{4}{3}\mathbf{L}$ színnel színezhető (ld.:a 6.4.2. tétel). Ebből következik, hogy a 6.2.2. állítás felső becslése nem mindig éles.

6.2.4. All-to-all kommunikáció

Az irányítatlan esettel ellentétben irányított fáknál az all-to-all igényhalmaz optimális színezése megoldott probléma.

6.2.7. Tétel. *Tetszőleges szimmetrikus irányított fa esetében az all-to-all igényhalmaz $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ színnel hatékonyan kiszínezhető.*

A tétel bizonyítására egy erősebb állítást is kimondunk, mely nem csak az all-to-all igényhalmazra, hanem igényhalmazok egy bővebb osztályára vonatkozik. Egy fát melynek pontjaihoz nem negatív egész súlyokat rendeltünk *súlyozott fának* nevezünk. Az \mathcal{F} fa egy x pontjának súlyát $s(x)$ -szel, a fa pontjainak összsúlyát $s(\mathcal{F})$ -fel jelöljük.

6.2.1. Definíció. *Egy $\mathcal{F}(V, E)$ fa esetén tekintsük a pontoknak egy nem negatív súlyozását. Az \mathcal{I} igényhalmazt szorzat alakúnak nevezzük, ha bármely $i \neq j$, $i, j \in V$ esetén $s(i) * s(j)$ példányát tartalmazza az (i, j) igénynek, és ezeken kívül más igényt nem tartalmaz.*

6.2.8. Tétel. *Tetszőleges irányított fa esetében egy szorzat alakú igényhalmaznál $W_{\min} = L$ és az optimális színezés hatékonyan elvégezhető a fa súlyozásának ismeretében.*

Az all-to-all igényhalmaz szorzat alakú, a hozzátartozó súlyozás az $s(i) = 1$, minden $i \in V$ esetén, ezért a továbbiakban ezt az erősebb állítást bizonyítjuk. A gyakorlat számára érdekes lehet még a pontok egy részhalmaza közötti all-to-all kommunikáció, amely szintén szorzat alakú.

Súlyozott fák generálása

A generálásról szóló szakaszban is irányított szimmetrikus fák szerepelnek, de itt az egyszerűség kedvéért irányítatlan $\{v, w\}$ éleket írunk, melyek helyett mindig (v, w) ill. (w, v) irányított szimmetrikus élpár értendő.

\mathcal{F} egy súlyozott fa, ahol $S = s(\mathcal{F})$. Az \mathcal{F} fának x egy levele, melyre $s(x) \leq S/2$ és x egyetlen szomszédja u . Továbbá δ egy egész szám, melyre $0 \leq \delta \leq s(x)$. A $\text{LEVELETHOZZÁAD}_\delta(x, \mathcal{F})$ művelet egy új y pontot és egy $\{y, x\}$ élet ad hozzá \mathcal{F} -hez. A $\text{LEVELETHASÍT}_\delta(x, \mathcal{F})$ művelet egy új y pontot és egy $\{y, u\}$ élet ad hozzá \mathcal{F} -hez. Mindkét műveletnél a súlyozásra $s(x) := s(x) - \delta$ és $s(y) := \delta$. Egyéb változtatást a fán és súlyozásán egyik művelet sem végez.

Fontos hangsúlyozni, hogy az x pont az \mathcal{F} fának egy levele, ezért van szükség a generáláshoz a LEVELETHASÍT műveletre is.

6.2.2. Definíció. *Egy \mathcal{F} súlyozott fát S/C -fának nevezünk, ha $s(\mathcal{F}) = S$, $C \leq S/2$ és \mathcal{F} egy maximális terhelésű élének két oldalán lévő ponthalmazok összszúlya C illetve $S - C$.*

6.2.1. Lemma. *Minden S/C -fánál $L = C * (S - C)$. □*

6.2.2. Lemma. *Minden S/C -fában létezik egy u pont, melyet elhagyva a szétesett komponensek közül semelyiknek az összszúlya sem nagyobb C -nél.*

Bizonyítás: Induljunk a fának egy tetszőleges p pontjából. Ha p összes szomszédos komponensének súlya nem nagyobb $S/2$ -nél, akkor C -nél sem nagyobbak (különben $L > C * (S - C)$, ami ellentmond a 6.2.1 állításnak), ezért $u = p$ megfelelő választás.

Ha p -nek van szomszédos komponense, melynek súlya nagyobb $S/2$ -nél, akkor lépünk egyet ebbe az irányba. Kereső eljárásunk végtelen ciklusba nem juthat, mivel egy élen nem mehetünk mindkét irányba, különben egy oda-vissza bejárt él a fát két $S/2$ -nél nagyobb súlyú komponensre osztaná.

□

6.2.3. Lemma. *Minden S/C -fa generálható egy S/C' -csillagból LEVELETHASÍT és LEVELETHOZZÁAD műveletek alkalmazásával, ahol $C' \leq C$.*

Bizonyítás: Az S/C' -csillag középpontja az előbbi u pont, levelei az S/C -fa u -val szomszédos pontjai. Az u pont súlya a csillagban egyezzen meg fabeli súlyával. Az elsőfokú pontok súlya a csillagban egyezzen meg a hozzátartozó fabeli komponens összsúlyával, ekkor $C' \leq C$, a 6.2.2. lemma miatt.

A generálás során először az S/C -fa összes u -tól 2 távolságra lévő pontját, majd a 3, 4, stb. távolságra lévő pontokat generáljuk, de az $i + 1$ távolságra lévőket csak akkor, ha az összes i távolságra lévővel már kész vagyunk. Egy i távolságra lévő pontból a k darab $(i + 1)$ távolságra lévő szomszédját egy LEVELETHOZZÁAD és $(k - 1)$ LEVELETHASÍT művelettel kapjuk. □

Színezés

A 6.2.3. állításban láttuk, hogy tetszőleges \mathcal{F} súlyozott S/C -fához létezik súlyozott fának egy $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ sorozata, ahol \mathcal{F}_0 egy S/C' -csillag, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$, és az \mathcal{F}_{k+1} fa \mathcal{F}_k -ből egy LEVELETHASÍT vagy egy LEVELETHOZZÁAD művelettel kapható meg. Mivel \mathcal{F}_0 egy csillag, igényei az 5.4.1. állítás alapján hatékonyan kielégíthetők $\mathbf{L} = C * (S - C) \geq C' * (S - C')$ színnel. A továbbiakban a 6.2.8. tétel bizonyításához azt látjuk be, hogy ha \mathcal{F}_k igényei érvényesen színezettek, akkor \mathcal{F}_{k+1} igényei új szín hozzávétele nélkül színezhetők.

Az \mathcal{F}_k már kiszínezett fát \mathcal{F} -fel, a belőle egy LEVELETHASÍT $_{\delta}(x, \mathcal{F})$ vagy egy LEVELETHOZZÁAD $_{\delta}(x, \mathcal{F})$ művelettel nyerhető \mathcal{F}_{k+1} -et \mathcal{F}' -vel jelöljük. (Az x pont \mathcal{F} egy levele.) In_{Path} az x -ből kijövő és Out_{Path} az x -be bemenő utak halmaza. Mindkét halmaz útjai már előre színezettek. In_{Color} és Out_{Color} a színeknek azok a halmazai, melyeket In_{Path} illetve Out_{Path} színezésére használtunk.

6.2.4. Lemma. 1.) $|In_{Path}| = |Out_{Path}| = s(x) * (S - s(x))$

$$2.) |In_{Path}| = |In_{Color}|$$

$$3.) |Out_{Path}| = |Out_{Color}|$$

Bizonyítás: Az 1.) az igényhalmaz szorzatalakúságából adódik. A 2.) és 3.) állítások abból következnek, hogy x levél, így a vele érintkező egy irányba menő igények mind különböző színűek. \square

Rögzítsünk egy tetszőleges Φ bijekciót Out_{Color} és In_{Color} között, melyre $\Phi(c) = c$, ha $c \in In_{Color} \cap Out_{Color}$. Particionáljuk Out_{Color} színeit $O_{1,z}, O_{2,z}, \dots, O_{s(z),z}$ halmazokra, $z \in V \setminus \{x\}$, ahol az $O_{i,z}$ halmaz $s(x)$ szint tartalmaz az (x, z) igények színezésére használt színek közül. Készítsük el In_{Color} hasonló partícióját is $I_{1,z}, I_{2,z}, \dots, I_{s(z),z}$ halmazokra $z \in V \setminus \{x\}$.

6.2.3. Definíció. Két szín I-ekvivalens (ill. O-ekvivalens) ha In_{Color} (ill. Out_{Color}) fenti partíciójában azonos halmazba tartoznak.

6.2.5. Lemma. $In_{Color} = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_{s(x)}$, ahol $j = 1, \dots, s(x)$ -re

$$a.) |A_j| = S - s(x), \text{ és}$$

b.) tetszőleges $c_1, c_2 \in A_j$ -re c_1 és c_2 nem I-ekvivalensek, valamint $\Phi(c_1)$ és $\Phi(c_2)$ nem O-ekvivalensek.

Továbbá a partícionálás hatékonyan elvégezhető.

Bizonyítás: Tekintsük a $P(I, O, E)$ páros gráfot. $I := \bigcup_{z \in V \setminus \{x\}} \{I_{1,z}, I_{2,z}, \dots, I_{s(z),z}\}$, $O := \bigcup_{z \in V \setminus \{x\}} \{O_{1,z}, O_{2,z}, \dots, O_{s(z),z}\}$. Az élhalmaznak In_{Color} színeit feleltessük meg, ahol a c színnek megfelelő e_c él $I_{j,z}$ -t és $O_{k,v}$ -t köti össze, ha $c \in I_{j,z}$ és $\Phi(c) \in O_{k,v}$. A konstrukcióból látható, hogy P egy $s(x)$ -reguláris páros gráf, melyre $|I| = |O| = S - s(x)$. Az élhalmaz a Hall tételéből adódóan felbontható $s(x)$ teljes párosításra, melyek megfelelő partícióját adják az In_{Color} halmaznak. \square

6.2.6. Lemma. A $LEVELETHASÍT_\delta(x, \mathcal{F})$ végrehajtása után kapott \mathcal{F}' súlyozott fa is kiszínezhető új színek használata nélkül.

Bizonyítás: A műveletek bevezetésénél és a 6.2.5. lemmában megismert jelöléseket használjuk, $s(x)$ az x pont \mathcal{F} -beli súlya. Az általánosság megtartásával feltehetjük, hogy $\delta \leq s(x) - \delta$, hiszen a $\text{LEVELETHASÍT}_\delta(x, \mathcal{F})$ és a $\text{LEVELETHASÍT}_{s(x)-\delta}(\mathcal{F}, x)$ műveletek ekvivalensek.

A 6.2.5. lemmából következik, hogy az A_i (ill. $\Phi(A_i)$) színhalmaz színeivel színezett x -be érkező (x -ből induló) utak minden $z \in V(\mathcal{F}) \setminus \{x\}$ pontra $s(z)$ darab z -ből induló (z -be érkező) utat tartalmaznak. Ezért \mathcal{F}' -ben elegendő az A_i (ill. $\Phi(A_i)$) partíciók színeivel színezett utakat közül δ partíciót y -ba (ill. y -ből), $s(x) - \delta$ partíciót x -be (ill. x -ből) vezetni (indítani). Ennek megfelelően a \mathcal{F}' -ben az $A_1, A_2, \dots, A_\delta$ színű utak érkezenek y -ba, az $A_{\delta+1}, \dots, A_{s(x)}$ utak érkezenek x -be. A $\Phi(A_{\delta+1}), \Phi(A_{\delta+2}), \dots, \Phi(A_{2\delta})$ utak induljanak y -ből, a $\Phi(A_1), \Phi(A_2), \dots, \Phi(A_\delta), \Phi(A_{2\delta+1}), \Phi(A_{2\delta+2}), \dots, \Phi(A_{s(x)})$ induljanak x -ből.

Az előbbi elosztásban az A_1 színű utak y -ba érkeznek és a $\Phi(A_1)$ színű utak x -ből indulnak, így az A_1 halmaz színeit használhatjuk az y -ból x -be menő utak színezésére. (Hiszen tetszőleges $c \in A_i$ szín a többi partíció közül csak $\Phi(A_i)$ -ben fordulhat elő.) Hasonló érvek alapján látható, hogy az y -ból x -be menő utak színezésére az $A_1, A_2, \dots, A_\delta$, az x -ből y -ba menő utakra az $A_{\delta+1}, \dots, A_{2\delta}$ színeket használhatjuk. Az új utak száma $\delta \cdot (s(x) - \delta) \leq \delta \cdot S/2 \leq \delta \cdot (S - s(x))$, ami a rendelkezésre bocsátott színek száma. \square

6.2.7. Lemma. *A $\text{LEVELETHOZZÁAD}_\delta(x, \mathcal{F})$ végrehajtása után kapott \mathcal{F}' súlyozott fa is kiszínezhető új színek használata nélkül.*

Bizonyítás: Az előző bizonyítás a $\delta \leq s(x) - \delta$ feltétel elhagyásával itt is érvényes. \square

6.3. Maximális és maximális értékű átvitel

A problémakört Marx D. részletesen tárgyalja a [24] műben, itt csak a három legfontosabb eredményt ismertetjük.

6.3.1. Tétel. *Irányított szimmetrikus fáknál a maximális átvitel probléma megoldása már a $\mathbf{W} = 1$ szín esetén is NP-nehéz.* \square

6.3.2. Tétel. *Irányítatlan fáknál a maximális értékű átvitel probléma $W = 1$ szín esetén polinom időben megoldható.* \square

6.3.3. Tétel. *Irányítatlan fáknál a maximális átvitel probléma $W = 2$ szín esetén NP-nehéz.* \square

6.4. Speciális szerkezetű fák és igényhalmazok

A fejezet eddigi részeiben tetszőleges fákkal és igényhalmazokkal illetve az all-to-all kommunikációval foglalkoztunk. Ebben a szakaszban olyan megszorításokról lesz szó, melyekkel az optimális színezés jobban közelíthető vagy hatékonyan meg is oldható. Az irányítatlan és irányított eseteket egymással párhuzamosan összehasonlító jelleggel tárgyaljuk.

A korlátos fokszámú fákkal foglalkozó eredményeket Jansen és Erlebach publikálta a [8] cikkben. A konstans átmérőjű fák vizsgálata egy új problémakör, melyben saját eredményeket ismertetünk a 3-átmérőjű irányított fákról. Az utolsó szakasz alapötlete Gargano, Hell és Pérennes [12] művéből származik. Az ott szereplő bizonyítás helyett egy egyszerűbb érvelést ismertetünk, melynek segítségével több erősebb állítást is igazolunk az irányított esetre.

6.4.1. Korlátos fokszámú fák

A 6.2.3. tétel kimondja, hogy irányított esetben még a $\Delta_{\mathcal{F}} = 3$ maximális fokszámú fák optimális színezése is NP-nehéz. Tekintsünk egy irányítatlan \mathcal{F} fát, melyre $\Delta_{\mathcal{F}} = k$, ahol k egy rögzített konstans. A 6.1.1. lemma felhasználásával elegendő az egymástól független lokális színezésekre hatékony eljárást találni. A lokális színezések korlátos fokszámú, azaz rögzített méretű csillagban jelentkeznek, ami az 5.1.1. lemma alapján egy legfeljebb k pontú $\mathcal{G}(V, E)$ gráf élszínezésére vezethető vissza. (Az egy hosszú igények miatt $2k$ pontra is szükség lehet, de azok utólag egyszerűen színezhetőek.) Ez a probléma csak azért nem korlátos, mert tetszőlegesen sok párhuzamos élt tartalmazhat a gráf. Viszont az egy színnel színezhető független élhalmazok száma egy c konstans, melyre $c \leq 2^{\binom{k}{2}}$. A lehetséges független élhalmazok egy felsorolása F_1, F_2, \dots, F_c , és ez sem függ a bemenettől. Az élszínezési probléma ekkor a következő: keressünk minimális számú F_i halmazt, amelyek pontosan fedik az E halmazt. Bármelyik halmazból legfeljebb $|E|$ -re lehet szükség, ezért

az összes ismétléses variáció vizsgálata $|E|^c$ lépést igényel, amely a bemenet méretének polinomja. Egy variáció esetén E pontos fedettségének ellenőrzése szintén polinom idejű, ezzel beláttuk az alábbi állítást:

6.4.1. Tétel. *A $\Delta_{\mathcal{F}} \leq k$ egyenlőtlenségnek eleget tevő \mathcal{F} fák körében –ahol $k \in \mathbf{Z}^+$ egy rögzített szám– tetszőleges \mathcal{I} igényhalmaz optimálisan színezhető polinom időben. \square*

Megjegyezzük, hogy a fent vázolt algoritmus polinom idejűnek nevezhető, de hatékonynak semmiképpen nem, mivel a lépésszám k -ban duplán exponenciális.

6.4.2. Konstans átmérőjű fák

Irányítatlan esetben az optimális színezés már csillagokban, azaz kettő átmérőjű fákban is **NP**-nehéz. Irányított esetben a kettő átmérőjű fák hatékonyan színezhetőek és a 6.2.4. tételben mondottak szerint, a négy átmérőjű fák az útszínezés **NP**-nehéz. Természetesen vetődik fel a kérdés: mi a komplexitása a három átmérőjű fák színezésének? Ezt a kérdést nem sikerült megválaszolni, de az alábbiakban olyan színezési eljárást mutatunk, mely ebben az esetben a 6.2.5. tételben szereplő $\frac{5}{3}\mathbf{L}$ színnél kevesebbet használ.

Adott egy $n + 1$ pontú irányított szimmetrikus csillag és egy rajta értelmezett \mathcal{I} igényhalmaz. A v_1 elsőfokú pontot érintő igények r régi színnel előre színezettek, továbbá u új szín áll rendelkezésünkre. A színezés *befejezhető*, ha az összes igény kielégíthető úgy, hogy az előre színezett igényeket *csak új színnel* színezhetjük át. (A többi igényt akár új akár régi színnel színezhetjük.)

6.4.1. Lemma. *Ha az $n + 1$ pontú irányított szimmetrikus csillagban a régi színek száma \mathbf{L} , akkor a színezés $\lfloor \frac{\mathbf{L}}{2} \rfloor$ új színnel befejezhető.*

Bizonyítás: Az 5.1.2. lemma alapján elkészítjük azt a $\mathcal{P}(I, O, E)$ páros gráfot, melynek élszínezése ekvivalens az útszínezéssel és $\Delta_{\mathcal{P}} = \mathbf{L}$. Az $i_1 \in \mathcal{I}$ és $o_1 \in \mathcal{O}$ pontokhoz illeszkedő élek előre színezettek. A \mathcal{P} gráfot élek hozzávételével kiegészítjük \mathbf{L} -regulárisra, ekkor az i_1 és o_1 pontokhoz illeszkedő új élek régi színnel színezhetőek. Az így nyert páros gráfot Hall tételének felhasználásával $T_1, T_2, \dots, T_{\mathbf{L}}$ teljes párosításokra partícionáljuk.

Tekintsük azt a \mathcal{G} gráfot, melynek pontjai a teljes párosítások, továbbá a T_i ill. T_j pontok között pontosan akkor van él, ha T_i -nek és T_j -nek van egy-egy azonos régi színnel előre színezett élük. (Ha T_i -ben két azonos színű él van, akkor hozzá egy hurokél csatlakozik.) Mindegyik teljes párosításban pontosan két él előre színezett: egy i_1 -hez és egy o_1 -hez illeszkedő. Így \mathcal{G} -ben minden pont foka kettő, azaz \mathcal{G} diszjunkt körök uniójából áll. A páros hosszú köröket 2-hosszú szakaszokra, az egynél hosszabb páratlan köröket egy 3-hosszú szakaszra és megfelelő számú 2-hosszú szakaszra osztjuk. A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogy az 1-hosszú körök új szín nélkül, a 2- és 3-hosszú szakaszok teljes párosításaiban szereplő élek egyetlen új szín segítségével színezhető. Ebből már adódik, hogy $\lfloor \frac{\mathbf{L}}{2} \rfloor$ -nél több új színre nincsen szükség.

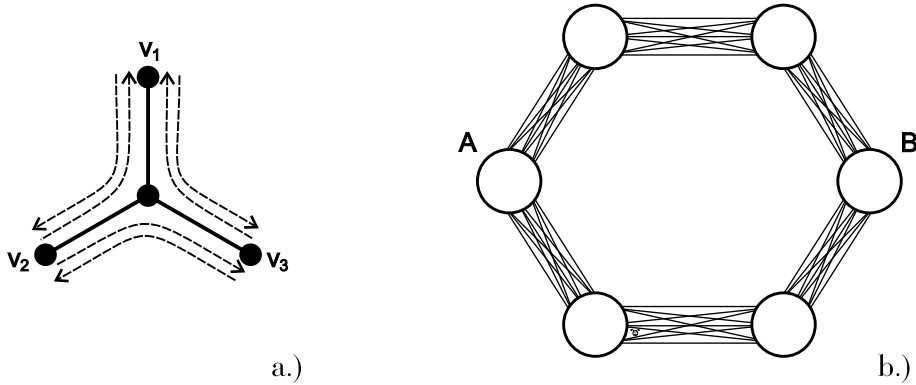
Egy teljes párosítást az előre színezett élek c_i ill. c_j régi színei alapján $\{c_i, c_j\}$ típusúnak nevezünk. Az 1-hosszú körök típusa $\{c_i, c_i\}$, ilyenkor a teljes párosítás többi élét is c_i színnel színezzük. A T_a, T_b kettő hosszú szakasznak megfelelő típusok $\{c_i, c_j\}$ ill. $\{c_j, c_k\}$. Ekkor T_a minden élét egy új színnel színezzük, (beleértve az i_1 -hez és az o_1 -hez illeszkedő élek átszínezését is), majd T_b még színezetlen éleit színezzük c_j -vel. A T_a, T_b, T_c három hosszú szakasznak megfelelő típusok $\{c_i, c_j\}$, $\{c_j, c_k\}$ és $\{c_k, c_l\}$, ebben színezzük T_b összes élét egy új színnel, továbbá T_a és T_c színezetlen éleit c_j és c_k színekkel. A színezés érvényes, mert mielőtt egy teljes párosítás valamely élét c színnel színeztük, gondoskodtunk róla, hogy c más párosításba tartozó élen ne forduljon elő. \square

A 6.2.1. állításban láttuk, hogy a két harmadfokú pontot tartalmazó három átmérőjű fákon is kialakítható olyan igényhalmaz, melyre $\mathbf{W}_{\min} = \frac{5}{4}\mathbf{L}$. Az ilyen harmadfokú pontot tartalmazó fáknál lesz segítségünkre a következő lemma, mely az előbbi $\frac{3}{2}$ konstansot $\frac{4}{3}$ -ra javítja ebben a speciális esetben. A következő lemmában és annak alkalmazásaiban nem térünk ki részletesen arra az esetre, ha a bizonyításban szereplő hányadosok nem lennének egészek.

6.4.2. Lemma. *Ha az $3 + 1$ pontú irányított szimmetrikus csillag és egy \mathcal{I} igényhalmaz esetén a régi színek száma \mathbf{L} . Ekkor a színezés $\frac{\mathbf{L}}{3}$ új színnel befejezhető.*

Bizonyítás: Az \mathcal{I} igényhalmazból hagyjuk el a v_2 vagy v_3 pontokat érintő egy hosszú igényeket, majd vegyük hozzá a lehető legtöbb (v_2, v_3) ill. (v_3, v_2)

igényt úgy, hogy az \mathbf{L} terhelés ne változzon. Az így nyert \mathcal{I}' igényhalmazt a 12. ábra a.) részén ábrázoltuk, ahol a berajzolt igények helyett igénykötegek szerepelnek (és a v_1 -hez illeszkedő egy hosszú igényeket nem rajzoltuk be.)



12. ábra.

A három átmérőjű fa harmadfokú pontja, az igénykötegek, és a megfelelő konfliktus gráf.

A (v_2, v_3) igények halmazát A -val, a (v_3, v_2) igényekét B -vel jelöljük. Az \mathcal{I}' igényhalmaz konfliktus gráfját az ábra b.) részén vázoltuk. Itt az egyes karikák az igénykötegeknek megfelelő klikkeket jeleznek, és a szomszédos klikkek bármely két elemére illeszkedik él (A szomszédos klikkek együtt is klikket alkotnak). Az A (ill. B) halmazzal szomszédos karikák K_A és N_A (ill. K_B és N_B) úgy, hogy $|K_A| \leq |N_A|$ (ill. $|K_B| \leq |N_B|$). A továbbiakban az $|A| = a$, $|B| = b$, $|K_A| = k_A$, $|N_A| = n_A$, $|K_B| = k_B$, $|N_B| = n_B$ egyszerűsítő jelöléseket használjuk. \mathcal{I}' terhelése \mathbf{L} , ezért a szomszédos karikákban lévő pontok száma összesen legfeljebb \mathbf{L} , valamint $a + n_A = \mathbf{L}$ és $b + n_B = \mathbf{L}$ az igényhalmaz feltöltöttsége miatt.

Tegyük fel, hogy $\min(a, b, k_A, n_A, k_B, n_B) = b$, ekkor $k_A + n_B \leq \mathbf{L}$ és $b = \mathbf{L} - n_B$ miatt $k_A \leq b$, tehát $k_A = b$. A szimmetriából adódóan az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy K_A egy legkisebb pontszámú karika, és ezért $k_A \leq \frac{\mathbf{L}}{2}$.

Mielőtt elkezdjük színezni a konfliktus gráf pontjait emlékeztetünk rá, hogy K_A, N_A, K_B és N_B pontjai régi színnel színezettek, ezek színeit vagy változatlanul hagyjuk vagy új színnel színezzük. A színezés legfontosabb lé-

pése a következő: egy félkész színezés esetén, ha K_A és N_A pontjain összesen n_A -nál több régi szín fordul elő, akkor található egy-egy különböző régi színnel színezett pont K_A -ban és N_A -ban. Ezeket egyetlen új színnel átszínezve a K_A és N_A pontjain összesen előforduló régi színek száma kettővel csökken, sőt az új színnel egy B -beli pontot is színezhetünk. Így $\frac{k_A}{3}$ új színt használva a K_A és N_A ponthalmazokon megmaradó régi színek száma $r_{K_A N_A}$, amelyre

$$\begin{aligned} r_{K_A N_A} &\leq n_A + k_A - 2\frac{k_A}{3} \\ &= n_A + \frac{k_A}{3} \\ &\leq n_A + \left(\frac{\mathbf{L}}{3} - \frac{k_A}{3}\right), \end{aligned}$$

továbbá a színezetlen B -beli pontok száma h_B , melyre

$$h_B = \max\left\{b - \frac{k_A}{3}, 0\right\}.$$

A szimmetriából adódóan az előbbi színezési lépést alkalmazhatjuk K_B , N_B és A halmazokra is. Ahol szintén teljesül, hogy ha K_B és N_B halmazokon összesen több mint n_B régi szín van, akkor egyetlen új szín felhasználásával kettővel csökkenthetők a K_B és N_B halmazokon összesen előforduló régi színek száma. Továbbá az új színt felhasználhatjuk A egy pontján is. Így $\left(\frac{\mathbf{L}}{3} - \frac{k_A}{3}\right)$ új színnel az A -beli színezetlen pontok száma h_A , melyre

$$h_A = \max\left\{a - \left(\frac{\mathbf{L}}{3} - \frac{k_A}{3}\right), 0\right\},$$

továbbá a K_B és N_B ponthalmazokon összesen a régi színek száma $r_{K_B N_B}$, amelyre

$$\begin{aligned} r_{K_B N_B} &\leq \min\{\mathbf{L}, n_B + k_B\} - 2\left(\frac{\mathbf{L}}{3} - \frac{k_A}{3}\right) \\ &= \left(\min\{\mathbf{L}, n_B + k_B\} - \frac{\mathbf{L}}{2}\right) + \left(\frac{k_A}{3} - \frac{\mathbf{L}}{6}\right) + \frac{k_A}{3} \\ &\leq n_B + 0 + \frac{k_A}{3}. \end{aligned}$$

A (ill. B) még színezetlen pontjai színezhetőek a K_A és N_A (ill. K_B és N_B) halmazokon elő nem forduló $\mathbf{L} - r_{K_A N_A}$ (ill. $\mathbf{L} - r_{K_B N_B}$) régi színnel, hiszen a fenti egyenlőtlenségekből következően

$$h_A + r_{K_A N_A} \leq a + n_A = \mathbf{L} \quad \text{és} \quad h_B + r_{K_B N_B} \leq b + n_B = \mathbf{L}.$$

□

6.4.2. Tétel. *Három átmérőjű irányított szimmetrikus fákon tetszőleges \mathcal{I} igényhalmaz hatékonyan kielégíthető $\lfloor \frac{3}{2}\mathbf{L} \rfloor$ színnel, ha az egyik pont foka három, akkor $\frac{4}{3}\mathbf{L}$ szín is elegendő.*

Bizonyítás: Jelöljük u_1 -gyel és legyen u_2 -vel a nem elsőfokú pontokat, és ezek közül u_2 az esetlegesen harmadfokú pont. Először kiszínezzük az u_1 -hez illeszkedő igényeket legfeljebb \mathbf{L} színnel. Utána az u_2 pontban végzett lokális színezéskor a már kiszínezett igényeket új színnel átszínezhajjuk, és a színezetlen igényekre akár új akár régi színt használhatunk, így az előbbi két lemmából adódik az állítás. □

Megjegyezzük, hogy ez az eljárás nem mohó útszínezés, mert a második lokális színezéskor az első színezést megváltoztatjuk.

6.4.3. Irányított és irányítatlan fák szintézise

Irányított fáknál láttuk, hogy az egyes lokális színezések egymástól függetlenül hatékonyan elvégezhetőek (lásd az 5.4.1. állítás). Irányítatlan fák esetén az érvényes lokális színezések új szín hozzá vétele nélkül összefésülhetőek (ld. a 6.1.1. lemma). Ebben a szakaszban olyan speciális szerkezetű igényhalmazt tárgyalunk, amelynél a két gondolat együttesen alkalmazható. Ha \mathcal{F} egy irányítatlan fa és \mathcal{I} egy rajta értelmezett igényhalmaz, akkor az élek megkettőzésével és ellentétes megírányításával kapható fát ill. az igények egy megfelelő írányításával nyert igényhalmazt $\vec{\mathcal{F}}$ -fel és $\vec{\mathcal{I}}$ -vel jelöljük. Fordítva az ékezet elhagyásával az írányítások megszüntetésével nyert irányítatlan feladatot jelöljük.

Jól irányíthatóság

6.4.1. Definíció. *Adott egy $\mathcal{F}(V, E)$ irányítatlan fa és egy rajta értelmezett \mathcal{I} igényhalmaz. Az $E' \subseteq E$ összefüggő élhalmazt jól irányíthatónak nevezzük, ha E' élei úgy irányíthatóak, hogy bármely igény E' -ben előforduló része egy irányított út.*

6.4.2. Definíció. Adott egy $\vec{\mathcal{F}}(V, \vec{E})$ irányított fa és egy rajta értelmezett \vec{I} igényhalmaz, a megfelelő irányítatlan fa $\mathcal{F}(V, E)$. Az $E' \subseteq E$ összefüggő élhalmazt jól irányíthatónak nevezük, ha E' élei irányíthatóak úgy, hogy bármely igény E' -ben előforduló része végig az irányítások mentén vagy azokkal ellentétesen haladjon.

Egy $v \in V$ pontban jól irányíthatónak nevezük a fákot, ha a v pontot érintő élek halmaza jól irányítható. A fákot jól irányíthatónak akkor hívjuk, ha a teljes élhalmaz jól irányítható. Hangsúlyozzuk, hogy a nyelvtani szerkezet azt sugallja, hogy a jól irányíthatóság a fa tulajdonsága, de valójában az igényhalmaz speciális szerkezetére utal.

Előbb megvizsgáljuk, hogy a jól irányíthatóságot hogyan lehet hatékonyan ellenőrizni, és utána rátérünk a színezési eredményekre.

6.4.3. Lemma. Egy irányított vagy irányítatlan fa és egy rajta értelmezett igényhalmaz esetén hatékonyan ellenőrizhető, hogy az élek egy v pontban jól irányíthatóak-e. Pozitív válasz esetén az irányítás hatékonyan el is készíthető.

Bizonyítás: Az irányíthatóságot a két színnel színezhetőségre vezetjük vissza. A v pontra illeszkedő éleket próbáljuk két színnel színezni; a c_K szín jelentése: v -ből kifelé ill. a c_B szín jelentése: v -be befele irányított. Két élet különbözően kell irányítani, ha van olyan igény, amelyik mindkét élen keresztül halad.

Egyrészt az élek egy érvényes $\{c_K, c_B\}$ színezése jól irányítja az éleket. Másrészt, ha az élek nem színezhetőek két színnel, akkor létezik páratlan sok $e_1, e_2, \dots, e_{2k+1}$ él, melyek közül bármely két szomszédot (e_1 és e_{2k+1} is szomszédok) ellentétesen kell irányítani, ami ellentmond a jól irányíthatóságnak.

A két színnel színezhetőség így hatékonyan ellenőrizhető, sőt egy jó színezés meg is található (pl. mohó módon egy mélységi keresés mentén), ezzel a lemmát igazoltuk. \square

6.4.1. Megjegyzés. A bizonyítás során az irányítatlan esetben az 5.1.1. lemmában leírt gráfról vizsgáljuk, hogy páros-e. Az irányított esetben az 5.1.2. lemmában ismertetett páros gráf pontjait próbáljuk meg úgy két színnel színezni, hogy az O_j és I_j pontpár azonos színű legyen, $j = 1, \dots, 2n$.

6.4.4. Lemma. Adott egy irányított vagy irányítatlan fa és egy rajta értelmezett igényhalmaz. A fa pontosan akkor jól irányítható, ha minden pontban jól irányítható.

Bizonyítás: Nyilván, ha valamely pontban nem jól irányítható a fa, akkor az egész fa sem jól irányítható.

A fordított irányú állításhoz először megirányítjuk valamely v_1 ponthoz illeszkedő összes élet. Vegyük ezután v_1 egy szomszédját, a v_2 pontot. Ekkor a v_2 ponthoz illeszkedő élek közül csak a $\{v_1, v_2\}$ él irányítása rögzített. Ez a v_2 -höz illeszkedő élek irányításakor nem jelent megszorítást, mivel az élek egy jó irányítása esetén azok megfordítása is jó. Ezt a gondolatot folytatva a pontok egy v_1, v_2, \dots, v_n szélességi bejárása mentén adódik az állítás. \square

Irányítatlan fák

6.4.3. Tétel. *Adott egy \mathcal{F} irányítatlan fa és \mathcal{I} egy rajta értelmezett igényhalmaz. Ha \mathcal{F} jól irányítható, akkor az igények $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ színnel hatékonyan kielégíthetők.*

Bizonyítás: Az igényeket a jó irányítás mentén irányítva az $\vec{\mathcal{I}}$ igényhalmazhoz jutunk. Az $(\vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{I}})$ irányított útszínezési feladat ekvivalens az $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ irányítatlan problémával. Az irányított feladatban a lokális színezések egymástól függetlenül hatékonyan elvégezhetőek $\mathbf{W} \leq \mathbf{L}$ színnel az 5.4.1. állítás felhasználásával. Másrészt az irányítatlan feladatban a 6.1.1. lemma felhasználásával a színezés új szín hozzá vétele nélkül elvégezhető. A 3.2.1. lemma miatt a $\mathbf{W} \leq \mathbf{L}$ szint használó színezés optimális és az egyenlőség is teljesül. \square

A következő fejezetben fogjuk igazolni, hogy tetszőleges igényhalmaz esetén a $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ egyenlőség ellenőrzése is NP-nehéz (ld. a 7.3.1. állítás). Ezért fontos az alábbi karakterizációs tétel, mely polinom időben ellenőrizhető szükséges és elégséges feltételt ad egy hasonló állításra.

6.4.4. Tétel. *Adott egy \mathcal{F} irányítatlan fa és egy rajta értelmezett \mathcal{I} igényhalmaz. Akkor és csak akkor teljesül minden $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ igényhalmazra a $\mathbf{W}'_{\min} = \mathbf{L}'$ egyenlőség, ha \mathcal{F} jól irányítható.*

Bizonyítás: Egyrészt ha \mathcal{F} jól irányítható, akkor az $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ igényhalmaz esetén is az, így az előző állítás felhasználásával adódik, hogy $\mathbf{W}'_{\min} = \mathbf{L}'$.

Másrészt ha \mathcal{F} nem jól irányítható, akkor a 6.4.4. lemma miatt található egy v pont, amelyben a fa nem jól irányítható. Ekkor a 6.4.1. megjegyzés alapján a v ponthoz illeszkedő lokális színezésnek megfelelően \mathcal{G} élszínezési

problémában \mathcal{G} nem páros gráf. Továbbá \mathcal{G} egy páratlan körének éleinek megfelelően \mathcal{I}' igényhalmazra $\mathbf{W}'_{\min} = 3$ és $\mathbf{L}' = 2$. \square

Irányított fák

6.4.5. Tétel. *Adott egy $\vec{\mathcal{F}}$ irányított fa és $\vec{\mathcal{I}}$ egy rajta értelmezett igényhalmaz. Ha \mathcal{F} jól irányítható, akkor az igények $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ színnel hatékonyan kielégíthetők.*

Bizonyítás: Az \mathcal{F} éleinek egy jó irányításával az igényhalmaz partícionálható $\vec{\mathcal{I}} = \vec{\mathcal{I}}_m \dot{\cup} \vec{\mathcal{I}}_e$, ahol $\vec{\mathcal{I}}_m$ a jó irányítások mentén, $\vec{\mathcal{I}}_e$ azokkal végig ellentétes irányban haladó igények halmaza. $\vec{\mathcal{I}}_e$ és $\vec{\mathcal{I}}_m$ igényei egymástól függetlenül színezhetőek, a két színezésnél azonos színeket is felhasználhatunk. Másrészt az irányítások elhagyásával az $(\mathcal{F}, \mathcal{I}_e)$ és $(\mathcal{F}, \mathcal{I}_m)$ feladatok külön-külön jól irányíthatóak és ekvivalensek az $(\vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{I}}_e)$ és $(\vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{I}}_m)$ irányított feladatokkal. Ezekre alkalmazva a 6.4.3. tételt adódik az állítás. \square

A 6.4.4. tételhez hasonló karakterizáció az irányított esetben nyitott kérdés, melyet részletesen a perfekt gráfokról szóló részben ismertetünk. Most megmutatjuk, hogy a tétel az irányított esetben nem igaz, ezzel egy gyengébb feltételt adunk a hatékony $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ színnel színezhetőségre.

6.4.6. Tétel. *Adott egy $\vec{\mathcal{F}}$ irányított fa és egy rajta értelmezett $\vec{\mathcal{I}}$ igényhalmaz. Ha \mathcal{F} egy v pont kivételével minden pontban jól irányítható, akkor az igények $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ színnel hatékonyan kielégíthetők.*

Bizonyítás: Az $\vec{\mathcal{F}} - \{v\}$ komponenseit kiegészítjük egy-egy a v ponthoz és a komponenshez is illeszkedő élpárral, így kapjuk az $\vec{\mathcal{F}}_1, \vec{\mathcal{F}}_2, \dots, \vec{\mathcal{F}}_d$ éldiszjunkt részfákat (a v pont foka d). Az $\vec{\mathcal{I}}_j$ igényhalmaz az $\vec{\mathcal{F}}_j$ -ben elhelyezkedő igényeket és az odaeső igénytöredékeket tartalmazza. Az $(\vec{\mathcal{F}}_j, \vec{\mathcal{I}}_j)$ feladatoknál \mathcal{F}_j már minden pontban jól irányítható, hiszen itt a v pont foka egy.

Először a v pontban végzünk lokális színezést $\mathbf{W} \leq \mathbf{L}$ színnel az 5.4.1. állítás felhasználásával. Utána az $(\vec{\mathcal{F}}_j, \vec{\mathcal{I}}_j)$ feladatok színezetlen igényeit színezzük, a v ponthoz érintkező színek meghagyásával. Az előző tétel bizonyításához hasonlóan $\vec{\mathcal{I}}_j = \vec{\mathcal{I}}_{j,m} \dot{\cup} \vec{\mathcal{I}}_{j,e}$. Az egyes $(\vec{\mathcal{F}}_j, \vec{\mathcal{I}}_{j,m})$ ill. $(\vec{\mathcal{F}}_j, \vec{\mathcal{I}}_{j,e})$ feladatokkal ekvivalens $(\mathcal{F}_j, \mathcal{I}_{j,m})$ ill. $(\mathcal{F}_j, \mathcal{I}_{j,e})$ irányítatlan feladatokban a v ponthoz illeszkedő előre kiszínezett igények már semmilyen megszorítást nem jelentenek.

Így a 6.4.3. tétel felhasználásával mindegyik rész színezhető $\mathbf{W} \leq \mathbf{L}$ színnel. A 3.2.1. lemma miatt a $\mathbf{W} \leq \mathbf{L}$ színt használó színezés optimális és az egyenlőség is teljesül. \square

6.4.7. Tétel. *Adott egy $\vec{\mathcal{F}}$ irányított fa és $\vec{\mathcal{I}}$ egy rajta értelmezett igényhalmaz. Ha \mathcal{F} fa v és v' pontok kivételével minden pontban jól irányítható, akkor az igények $\mathbf{W} = \lfloor \frac{3}{2}\mathbf{L} \rfloor$, ha v pont foka 3, akkor $\frac{4}{3}\mathbf{L}$ színnel hatékonyan kielégíthetők.*

Bizonyítás: Az előző bizonyításhoz hasonlóan elkészítjük a v ponthoz illeszkedő $\vec{\mathcal{F}}_1, \vec{\mathcal{F}}_2, \dots, \vec{\mathcal{F}}_d$ éldiszjunkt részfákat. Az előző tétel alkalmazásával kiszínezhethetjük azokat az igényeket $\mathbf{W} \leq \mathbf{L}$ színnel, amelyek a v' pontot tartalmazó komponensben előfordulnak. Utána a v pontot érintő még színezetlen utakat színezzük a 6.4.1. és a 6.4.2. lemmák felhasználásával, aminek során $\lfloor \frac{\mathbf{L}}{2} \rfloor$ ill. $\frac{\mathbf{L}}{3}$ új színnél több nem szükséges. A többi igényt az előző bizonyításhoz hasonlóan további új szín nélkül színezhethetjük. \square

6.5. Összefoglalás

Fa alakú hálózatoknál az irányított és az irányítatlan esetben teljesen más jellegű eredményeket, megoldási módszereket kaptunk. Ez egyrészt annak köszönhető, hogy már csillagoknál is jelentős különbségek voltak, másrészt a fák csillagokra bontása is máshogy befolyásolja a problémát a két esetben. Fontos eredményként kiemelnénk, hogy irányított fában az \mathcal{I}_a igényhalmazt hatékonyan kielégíthetjük \mathbf{W}_{\min} színnel. Ennek a problémának az irányítatlan gráfbeli megfelelője még megoldatlan.

Fák, \mathcal{I} igényhalmaz				
	Optimális színezés	Közelítés	Legrosszabb esetben optimális	$\mathbf{W}_{\mathbf{L},\min}$
irányítatlan	NP-nehéz	$\lfloor 1.1\mathbf{W}_{\min} + 0.8 \rfloor$	hatékony algoritmus	$\mathbf{W}_{\mathbf{L},\min} = \frac{3}{2}\mathbf{L}$
irányított	NP-nehéz	$\frac{5}{3}\mathbf{W}_{\min}$	ha $\mathbf{W}_{\mathbf{L},\min} = \frac{5}{3}\mathbf{L}$, akkor hatékony	$\frac{5}{4}\mathbf{L} \leq \mathbf{W}_{\mathbf{L},\min} \leq \frac{5}{3}\mathbf{L}$

Fák				
	Irányítatlan		Irányított	
	Általános	Korlátos fokszámú	Általános	Korlátos fokszámú
optimális színezés	NP -nehéz	P	NP -nehéz	NP -nehéz
maximális átvitel	NP -nehéz	NP -nehéz	NP -nehéz	NP -nehéz
maximális értékű átvitel	NP -nehéz	NP -nehéz	NP -nehéz	NP -nehéz
maximális független ih.	P	P	NP -nehéz	P
maximális súlyú független ih.	P	P	NP -nehéz	P
bővíthetőség	NP -nehéz	NP -nehéz	NP -nehéz	NP -nehéz
\mathcal{I}_a optimális színezése	?	P	P	P

7. Perfekt gráfok

A láncokról, csillagokról és fákról szóló fejezetekben optimalizálási problémákra kerestünk megoldásokat, és végig nagy hangsúlyt fektettünk a minimális színszám és az éleken előforduló maximális terhelés kapcsolatának feltérképezésére. Most elsősorban a konfliktus gráf tulajdonságait vizsgáljuk. Rávilágítunk, hogy az eddig megismert mennyiségek és színezési eredmények milyen kapcsolatban vannak a konfliktus gráf maximális klikkméretével, kromatikus számával és perfektségével. Ez a kapcsolat mind a perfekt gráfok, mind az optikai hálózatok elmélete részére gyümölcsöző: új színezési eljárásokat és új perfekt gráfokhoz kapcsolódó kérdéseket is tárgyalunk.

Ebben a szakaszban tárgyalt eredmények nagy része a [15] cikkben megtalálható, ahol bizonyították, hogy irányítatlan fák konfliktus gráfjaira teljesül az erős perfekt gráf sejtés. Azonban itt saját bizonyítást ismertetünk, melynek ereje, hogy a sejtés feltételeit hatékonyan ellenőrzi és ha azok teljesülnek, akkor polinom időben optimális színezést is ad. A bizonyítás legfontosabb része, hogy ugyanezt az állítást tetszőleges élgráfra is belátjuk.

7.1. Elméleti háttér

Ebben a szakaszban kizárólag irányítatlan egyszerű gráfokkal foglalkozunk, mert pontszínezési szempontból csak ezek értelmesek. Egy \mathcal{G} gráf teljes részgráfját *klikknek* nevezzük, a maximális klikkméretet $\omega(\mathcal{G})$ -vel jelöljük. Optikai hálózatokban az egy élen keresztülhaladó utaknak megfelelő pontok a konfliktus gráfban egy klikket alkotnak, ezért

$$\omega(\mathcal{G}_k) \geq \mathbf{L}_{\mathcal{R}}.$$

A gráf egy pontszínezésében egy klikk minden pontját különböző színnel kell színezni, ezért

$$\chi(\mathcal{G}) \geq \omega(\mathcal{G}).$$

A két egyenlőtlenségből adódik a 3.2.2. lemma egy újabb bizonyítása:

$$\mathbf{W}_{\min} = \chi(\mathcal{G}_k) \geq \omega(\mathcal{G}_k) \geq \mathbf{L}_{\mathcal{R}}.$$

Tetszőleges \mathcal{G} gráf esetén $\chi(\mathcal{G})$ és $\omega(\mathcal{G})$ meghatározása NP-nehéz [30], sőt a könnyebbnek tűnő $\chi(\mathcal{G}) = \omega(\mathcal{G})$ kérdés eldöntése is az. (Utóbbit a 7.3.1. állítás irányított fákra vonatkozó része is igazolja.) Mindezek fényében igen érdekes az alábbi állítás:

7.1.1. Tétel (Lovász). *Létezik polinom idejű algoritmus, mely tetszőleges \mathcal{G} gráf esetén meghatároz egy számot $\chi(\mathcal{G})$ és $\omega(\mathcal{G})$ között. [22] \square*

Egy $\mathcal{G}(V, E)$ gráf és $V' \subseteq V$ ponthalmaz esetén $\mathcal{G}(V')$ -vel jelöljük a V' pontok által feszített részgráfot.

7.1.1. Definíció (Berge). *Egy $\mathcal{G}(V, E)$ gráf perfekt, ha minden $V' \subseteq V$ ponthalmazra $\chi(\mathcal{G}(V')) = \omega(\mathcal{G}(V'))$.*

Egyelőre nyitott kérdés, hogy egy gráf perfektsége leellenőrizhető-e polinom időben. Az mindenesetre a 7.1.1. tételből következik, hogy perfekt gráfokon $\chi(\mathcal{G})$ és $\omega(\mathcal{G})$ polinom időben számítható. Végül kimondjuk a perfekt gráfokról szóló, egyik legismertebb eredményt.

7.1.2. Tétel (Lovász). *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha komplementere perfekt. \square*

7.1.1. Nevezetes perfekt és nem perfekt gráfok

7.1.2. Definíció. *Egy $\mathcal{G}(V, E)$ irányítatlan gráf intervallumgráf, ha a csúcsai megfeleltethetők egy olyan \mathcal{I} halmaznak, melynek elemei egy lineárisan rendezett halmaz intervallumai, úgy, hogy két csúcs között akkor és csak akkor legyen él, ha a megfelelő intervallumok metszete nem üres.*

Egy láncon értelmezett igényhalmaz konfliktus gráfja intervallumgráf. Az 5.1.2. lemmában láttuk, hogy egy irányított csillagon értelmezett igényhalmaz konfliktus gráfja egy páros gráf élgráfja. Amikor ezekre bizonyítottuk, hogy $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$, akkor egy-egy klikk méretű színezést mutattunk, ezért ilyenkor $\chi(\mathcal{G}_k) = \omega(\mathcal{G}_k)$. Mivel egy páros gráf élgráfjának ill. egy intervallumgráfnak bármely feszített részgráfja is egy páros gráf élgráfja ill. egy intervallumgráf, az alábbi állítást is igazoltuk.

7.1.3. Tétel. *Intervallum gráfok és páros gráfok élgráfjai is perfektek. \square*

A 6.4.6. és a 6.4.5. tételekben is egy-egy klikkméretű színezést mutattunk jól irányíthatóság esetén. Ez a tulajdonság a konfliktus gráf minden feszített részgráfjára öröklődik, ahonnan már következik az alábbi tétel.

7.1.4. Tétel. *Irányítatlan esetben a jól irányítható, irányított esetben a legfeljebb egy pont kivételével jól irányítható fákon értelmezett igényhalmazok konfliktus gráfjai perfektek.* \square

Érdeemes megjegyezni, hogy a 7.1.4. tételben szereplő gráfosztályok tartalmazzák az intervallumgráfok és a páros gráfok élgráfjainak osztályát is, ezért ez a tétel a 7.1.3. tétel általánosítása.

A páratlan köröket C_{2k+1} -gyel, a páratlan körök komplementereit \bar{C}_{2k+1} -gyel jelöljük. A legalább öt hosszú körök és komplementereik nem perfektek. Az utóbbi \bar{C}_{2k+1} , $k \geq 2$ azért nem, mert $\omega(\bar{C}_{2k+1}) = k$, de egy szint legfeljebb két ponton lehet használni. Perfekt gráfok karakterizálásáról az alábbi sejtés ismert Berge-től.

7.1.1. Sejtés (Erős perfekt gráf sejtés). *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha nem tartalmaz legalább öt hosszú páratlan kört vagy annak komplementerét feszített részgráfként.*

A sejtést több nevezetes gráfosztályra is belátták, pl. a [14] könyv megemlíti az $K_{1,3}$ mentes gráfok, a 3-színű színezhető gráfok, a síkgráfok és toroid gráfok osztályait is. Az élgráfokra és az irányítatlan fákon értelmezett igényhalmazok konfliktus gráfjaira vonatkozóan saját bizonyítást is ismertetünk a fejezet végén. Perfekt és nem perfekt gráfok vizsgálatánál is nagy szerepe van az alábbi definíciónak.

7.1.3. Definíció. *Egy nem perfekt gráfot minimális imperfektnek nevezünk, ha bármely pont elhagyásával perfekt gráfhoz jutunk.*

A legalább öt hosszú páratlan körök és komplementereik minimális imperfekt gráfok.

Végül megjegyezzük, hogy nem perfekt gráfokra is teljesülhet a $\chi(\mathcal{G}) = \omega(\mathcal{G})$ egyenlőség. Az irányítatlan csillagok és az itt fákon értelmezett all-to-all kommunikációhoz tartozó konfliktus gráfok esetében is ez a helyzet.

7.1.2. Klikkszeparátorok

Ebben a szakaszban a részleges színezések összefésülésére többször is használt alapvető gondolatot ismétljük meg általánosságban.

7.1.4. Definíció. *A $\mathcal{G}(V, E)$ gráfban egy $\mathcal{G}(V_K)$ részgráfot $V_K \subset V$ klikkszeparátornak nevezünk, ha*

- a $\mathcal{G}(V_K)$ részgráf klikk, és
- létezik olyan $V \setminus V_K = V_1 \dot{\cup} V_2$ partíció $V_1, V_2 \neq \emptyset$, hogy $\mathcal{G}(V_1 \cup V_2)$ -ben nincs él V_1 és V_2 pontjai között.

7.1.1. Lemma. Ha $\mathcal{G}(V_1 \cup V_K)$ gráf k_1 színnel és $\mathcal{G}(V_2 \cup V_K)$ gráf k_2 színnel színezzhető, akkor az eredeti $\mathcal{G}(V, E)$ gráf $\max\{k_1, k_2\}$ színnel színezzhető.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $k_1 \geq k_2$. Először kiszínezzük $V_1 \cup V_K$ pontjait. Utána V_2 pontjainak színezésekor újra felhasználhatjuk a klikkszeparátorban nem szereplő színeket is, ezért $\mathcal{G}(V_2 \cup V_K)$ érvényes színezéséből csak a színek átnevezésével befejezhetjük a színezést. \square

7.1.1. Következmény. $\chi(\mathcal{G}(V, E)) = \max\{\chi(\mathcal{G}(V_1 \cup V_K)), \chi(\mathcal{G}(V_2 \cup V_K))\}$.

7.1.2. Következmény. Ha $\mathcal{G}(V_1 \cup V_K)$ és $\mathcal{G}(V_2 \cup V_K)$ perfekt, akkor $\mathcal{G}(V, E)$ is az.

Bizonyítás: Itt azt használjuk fel, hogy $\mathcal{G}(V, E)$ egy $\mathcal{G}(V')$ feszített részgráfja vagy részgráfja $\mathcal{G}(V_1 \cup V_K)$ ill. $\mathcal{G}(V_2 \cup V_K)$ gráfoknak vagy $\mathcal{G}(V' \cap V_K)$ klikkszeparátor a $\mathcal{G}(V')$ gráfban, ekkor az előző következmény felhasználásával adódik az állítás. \square

7.1.3. Következmény. Minimális imperfekt gráfok nem tartalmazzak klikkszeparátort.

7.1.4. Következmény. A $\mathcal{G}(V, E)$ gráf akkor és csak akkor perfekt, ha $\mathcal{G}(V_1 \cup V_K)$ és $\mathcal{G}(V_2 \cup V_K)$ is az.

Bizonyítás: Az egyik irányt a 7.1.2. következmény mondja ki, a fordított irány abból következik, hogy minden nem perfekt gráf tartalmaz minimális imperfekt gráfot, amelyet az előző következmény alapján $\mathcal{G}(V_1 \cup V_K)$ vagy $\mathcal{G}(V_2 \cup V_K)$ tartalmaz. \square

7.1.1. Állítás.

$$\omega(\mathcal{G}(V, E)) = \max\{\omega(\mathcal{G}(V_1 \cup V_K)), \omega(\mathcal{G}(V_2 \cup V_K))\}$$

Bizonyítás: A definícióból adódóan egy klikk nem tartalmaz klikkszeparátort, ezért a maximális klikket $\mathcal{G}(V_1 \cup V_K)$ vagy $\mathcal{G}(V_2 \cup V_K)$ tartalmazza.

□

Az itt felsorolt tételek és következmények sok korábbi (és későbbi) állítás magját alkotják. Egy irányítatlan fa egy e élén keresztülmenő utak is klikkszeparátort alkotnak a konfliktus gráfban, ha a fában az e élet nem tartalmazó mindkét komponensben van út. A 7.1.1. lemma felhasználásával is bizonyítható lett volna, hogy az irányítatlan fák útszínezése visszavezethető csillagokban felmerülő problémára. A jól irányítható fák esetén is azt mutatuk meg, hogy klikkszeparátorok segítségével a konfliktus gráf szétbontható páros gráfok élgráfjaira. A fejezet hátralévő részeiben a klikkszeparátoroknak további alkalmazásait is ismertetjük.

7.2. A maximális terhelés és a maximális klikkméret

A konfliktus gráf maximális klikkmérete nem kisebb a terhelésnél, és alulról lehet vele becsülni a szükséges színek számát. Általában a maximális klikkméret meghatározása NP-nehéz, ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy irányítatlan és irányított fáknál a konfliktus gráf maximális klikkmérete hatékonyan számítható, sőt az irányított esetben ez megegyezik a terheléssel. Mindkét bizonyításnál kihasználjuk azt a konvexitásra emlékeztető tulajdonságot, hogy (irányított) fában n út közös része egyetlen (irányított) intervallum, és az n út egy részalmazának közös része az előzőt tartalmazó intervallum. A „közös része” kifejezés alatt egyaránt érthetünk közös (irányított) élet vagy pontot, bár az utóbbi esetben az egyetlen pontból álló nulla hosszú utat ill. intervallumot is értelmeznünk kell. A továbbiakban a $\mathcal{P}_{i_1} \cap \mathcal{P}_{i_2} \cap \dots \cap \mathcal{P}_{i_k}$ közös részt egyszerűen $\mathcal{P}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ -val jelöljük.

7.2.1. Lemma. *Ha egy irányítatlan \mathcal{F} fában a $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ utak közül bármely kettőnek van közös pontja, akkor létezik olyan pont, amelyet mind-egyik út érint.*

Bizonyítás: Az állítást teljes indukcióval igazoljuk. A lemma az $n = 1, 2$ esetekben nyilvánvalóan teljesül. A továbbiakban az $\{1, 2, \dots, n\} \implies \{n+1\}$ implikációt bizonyítjuk.

Az indukciós feltétel miatt $\mathcal{P}_{2, \dots, n}$, $\mathcal{P}_{1, 2, \dots, n}$ és $\mathcal{P}_{2, \dots, n, n+1}$ legalább egy pontból álló intervallumok. Továbbá a $\mathcal{P}_{2, \dots, n}$ intervallum tartalmazza a $\mathcal{P}_{1, 2, \dots, n}$

és a $\mathcal{P}_{2,\dots,n,n+1}$ intervallumokat. Indirekten igazoljuk, hogy a két tartalmazott intervallumnak is van közös pontja. Ha a $\mathcal{P}_{1,2,\dots,n}$ és a $\mathcal{P}_{2,\dots,n,n+1}$ intervallumoknak nincs közös pontjuk, akkor legyen v_1 és v_2 a $\mathcal{P}_{1,2,\dots,n}$ és a $\mathcal{P}_{2,\dots,n,n+1}$ egymáshoz közelebb fekvő szélső pontjai a $\mathcal{P}_{2,\dots,n}$ intervallumon. Ez esetben v_1 -ből v_2 -be vezet út a $\mathcal{P}_{2,\dots,n}$ élein is és a közös pontot tartalmazó \mathcal{P}_1 ill. \mathcal{P}_{n+1} élein is, ami ellentmond a fa körmentességének. \square

7.2.2. Lemma. *Egy $\mathcal{G}(V, E)$ irányítatlan gráfban legyen tetszőleges három pont között futó élek számának maximuma $h_{\mathcal{G}}$ és a gráf maximális fokszáma $\Delta_{\mathcal{G}}$. Ekkor a gráf \mathcal{G}_e élgráfjára:*

$$\omega(\mathcal{G}_e) = \max\{h_{\mathcal{G}}, \Delta_{\mathcal{G}}\}.$$

Bizonyítás: Három pont között futó élek és az egy ponthoz illeszkedő élek az élgráfban klikket alkotnak. Megmutatjuk, hogy az élgráfban nincsenek más klikkek. Tegyük fel, hogy az $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ éleknek megfelelő pontok klikket alkotnak az élgráfban. Ha az éleknek nincsen egyetlen közös végpontjuk, akkor léteznek az e_1 élek csak az egyik ill. csak a másik végpontjához illeszkedő e_i és e_j élek. Az e_1, e_i és e_j élek háromszöget alkotnak, és az összes többi él ezek valamelyikével párhuzamos. \square

Egy irányítatlan \mathcal{F} fán értelmezett \mathcal{I} igényhalmaz esetén tekintsük azokat az $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ részhalmazokat, amelyekhez létezik egy 3+1 pontú részcsillag \mathcal{F} -ben úgy, hogy \mathcal{I}' minden igénye a csillag két élén keresztül megy. A legtöbb elemet tartalmazó ilyen tulajdonságú \mathcal{I}' halmaz méretét $h_{\mathcal{I}}$ -vel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy az igényhalmaztól és a fától függően $h_{\mathcal{I}}$ bármilyen $(\frac{3}{2}\mathbf{L})$ -nél nem nagyobb értéket felvehet.

7.2.1. Tétel. *Egy irányítatlan \mathcal{F} fán értelmezett \mathcal{I} igényhalmaz esetén*

- $\omega(\mathcal{G}_k) = \max\{\mathbf{L}, h_{\mathcal{I}}\}$,
- $\mathbf{L} \leq \omega(\mathcal{G}_k) \leq \frac{3}{2}\mathbf{L}$, továbbá
- $\omega(\mathcal{G}_k)$ polinom időben számítható.

Bizonyítás: Egy maximális klikk bármely két útjának van közös éle (ezért közös pontja is), így a 7.2.1. lemma alapján az utak egy közös v pontot érintenek. A v pontot érintő utakhoz az 5.1.1. lemma alapján elkészíthetjük azt

a \mathcal{G} gráfot, amelynek élgráfja izomorf \mathcal{G}_k -ban a v pontot érintő utaknak megfelelő pontok által feszített részgráffal. Az első két állítás a 7.2.2. lemmából adódik, mivel $\Delta_{\mathcal{G}} = \mathbf{L}$ és $h_{\mathcal{G}} = h_{\mathcal{I}}$.

Az utolsó állítás azért igaz, mert \mathbf{L} és $h_{\mathcal{I}}$ is polinom időben számítható mennyiségek. Utóbbi azért, mert az \mathcal{F} fa három élű részcsillagaiból polinom sok van. \square

A bizonyítás legfontosabb lépése az volt, hogy \mathcal{G}_k klikkeinek megfelelő utak egy közös pontot érintenek. Erre mutatunk egy másik bizonyítást, amely nem használja fel a 7.2.1. lemmát. Egy $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ irányítatlan útszínezési probléma esetén vegyük \mathcal{F} -nek azt a legkevesebb élt tartalmazó \mathcal{F}' részfáját, amelybe eső utaknak megfelelő pontok által \mathcal{G}_k -ban feszített részgráf tartalmaz egy $\omega(\mathcal{G}_k)$ méretű klikket. Indirekten tegyük fel, hogy \mathcal{F}' nem csillag, vagyis tartalmaz egy olyan e élet, amelyet elvéve \mathcal{F}' élet is tartalmazó komponensekre \mathcal{F}'_1 -re és \mathcal{F}'_2 -re esik szét. Egy maximális klikknek megfelelő utak közül léteznek olyanok, amelyek csak \mathcal{F}'_1 -ben ill. \mathcal{F}'_2 -ben haladnak. (Különben \mathcal{F}'_1 vagy \mathcal{F}'_2 élei elhagyhatóak volnának \mathcal{F}' -ből.) Így egy maximális klikkben az e élen keresztül haladó igények klikkszeparátort alkotnak a klikkben, ami ellentmondás, hiszen egy teljes gráf nem tartalmaz klikkszeparátort.

Most rátérünk az irányított szimmetrikus fákhhoz tartozó konfliktus gráf vizsgálatára, ami az irányítatlan fák eredményeinek ismeretében nem jelent nehézséget.

7.2.2. Tétel. *Egy irányított szimmetrikus \mathcal{F} fán értelmezett \mathcal{I} igényhalmaz esetén*

$$\omega(\mathcal{G}_k) = \mathbf{L}.$$

Bizonyítás: Egy maximális klikk útjain az irányítást elhagyva teljesül, hogy bármely két útnak van közös pontja, ezért a 7.2.1. lemma alapján az utak egy közös v pontot érintenek. A v pontot érintő utakhoz az 5.1.2. lemma alapján elkészíthetjük azt a \mathcal{G} gráfot, amelynek \mathcal{G}_e élgráfja izomorf \mathcal{G}_k -ban a v pontot érintő utaknak megfelelő pontok által feszített részgráffal. Az irányított esetben \mathcal{G} páros, ezért nem tartalmaz háromszöget, így a 7.2.2. lemma miatt az élgráf maximális klikkmérete Δ . Tehát $\mathbf{L} = \Delta = \omega(\mathcal{G}_e) = \omega(\mathcal{G}_k)$. \square

7.3. Erős perfekt gráf sejtés irányítatlan fák konfliktus gráfjaira

Dolgozatunk elején a szükséges színek számára egyszerű alsó korlátot mutatunk: az L terhelést. Nagy hangsúlyt fektettünk annak eldöntésére, hogy $W_{\min} = L$ egyenlőség teljesül-e. Általában fa alakú hálózatoknál ez a kérdés nehezen kezelhető.

7.3.1. Állítás. *Irányított vagy irányítatlan fa alakú hálózatoknál a $W_{\min} = L$ egyenlőség leellenőrzése NP-nehéz.*

Bizonyítás: A 6.1.1. állítás és a 6.2.4. tétel kimondják, hogy mindkét esetben a $W = 3$ színnel színezhetőség ellenőrzése NP-nehéz. Ez a probléma egyszerűen visszavezethető a $W_{\min} = L$ egyenlőség leellenőrzésére. Ha $L > 3$, akkor \mathcal{I} biztosan nem 3-színezhető. Különbözőben az \mathcal{F} fához egy levelet illesztve, azon három párhuzamos egy hosszú új igényt vezetve az $(\mathcal{F}', \mathcal{I}')$ problémában $W'_{\min} = L'$ akkor és csak akkor, ha az eredeti utak 3-színezhetőek. \square

A következő kérdés megválaszolásának komplexitása könnyebb lehet: leellenőrizendő egy fán értelmezett \mathcal{I} igényhalmazra, hogy minden $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ esetén a $W'_{\min} = L'$ egyenlőség teljesül-e. Az irányítatlan esetben a 6.4.4. tétel alapján erre létezik polinom idejű algoritmus. Az irányított esetben ez a probléma megoldatlan, a 7.2.2. tétel alapján itt azt kellene igazolni, hogy a konfliktus gráf perfektsége hatékonyan eldönthető. A továbbiakban megmutatjuk, hogy az irányítatlan esetben a perfektség is hatékonyan ellenőrizhető. Ehhez az erős perfekt gráf sejtés egy speciális esetének bizonyításán keresztül vezet az út.

7.3.2. Állítás. *Ha egy irányítatlan fa konfliktus gráfja tartalmaz $2k + 1 \geq 5$ hosszú C_{2k+1} kört vagy \bar{C}_{2k+1} annak komplementerét feszített részgráfként, akkor e részgráf pontjainak megfelelő utaknak van közös pontjuk.*

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy a C_{2k+1} ill. a \bar{C}_{2k+1} pontjainak megfelelő utak közül bármely kettőnek van közös pontja. Ha két útnak nem lenne közös pontja, akkor létezne a fának egy e éle, amelynek két oldalán helyezkedne el két út. A C_{2k+1} ill. a \bar{C}_{2k+1} pontjai közül az e élen keresztül menő utaknak megfelelő pontok egy klikkseparatorátort alkotnának, ami ellentmondana a 7.1.3. következménynek, hiszen a C_{2k+1} ill. a \bar{C}_{2k+1} minimális imperfekt gráfok.

Mivel a megfelelő utak közül bármely kettőnek van közös pontja, a 7.2.1. lemma felhasználásával az összes útnak létezik közös pontja. \square

Az előző fejezetben láttuk, hogy a klikkek útjai mindig érintenek egy pontot. Az iménti bizonyításban is azt igazoltuk, hogy minimális imperfekt gráfok útjai is érintenek egy pontot. Mindezek alapján érezhető, hogy az irányítatlan fákon értelmezett igényhalmazok perfektségét is az egyes lokális problémákban érdemes vizsgálni.

Egy \mathcal{F} irányítatlan fában a v pont szomszédai között szerepelnek a v_0, v_1, \dots, v_{t-1} pontok. Az $i_0, i_1, \dots, i_{t-1} \in \mathcal{I}$ igények v pontot érintő t -körkommunikációt alkotnak, ha i_j útja tartalmazza a $\{v, v_j\}$ és a $\{v, v_{j+1 \pmod t}\}$ éleket, $j = 0, 1, \dots, t-1$. Körkommunikáló igények a konfliktus gráfban egy feszített kört alkotnak, ennek létezése $t = 2k + 1 \geq 5$ esetén kizárja a konfliktus gráf perfektségét. Megmutatjuk, hogy az állítás fordítottja is igaz.

7.3.1. Tétel. *Egy irányítatlan $\mathcal{F}(V, E)$ fa és \mathcal{I} igényhalmaz esetén az alábbi állítások ekvivalensek:*

- a.) *az igényhalmaz semelyik pontban nem tartalmaz t -körkommunikációt, $t = 2k + 1 \geq 5$ esetén;*
- b.) *a \mathcal{G}_k konfliktus gráf perfekt;*
- c.) *a \mathcal{G}_k konfliktus gráf nem tartalmaz $2k + 1 \geq 5$ hosszú C_{2k+1} kört vagy \bar{C}_{2k+1} annak komplementerét feszített részgráfként.*

Továbbá létezik hatékony eljárás, mely tetszőleges $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ esetén polinom időben eldönti, hogy \mathcal{G}_k perfekt-e, ha igen, akkor ki is színezi $\chi(\mathcal{G}_k) = \mathbf{W}_{\min}$ színnel az utakat.

Bizonyítás: A b.) \implies c.) és a c.) \implies a.) állítások nyilvánvalóak. A továbbiakban az a.) \implies b.) állítást igazoljuk. Tetszőleges feszített részgráf előáll egy fa útjainak konfliktus gráfként, és ha az a.) tulajdonság teljesül, akkor a feszített részgráfokban is teljesül, ezért elegendő a $\chi(\mathcal{G}_k) = \omega(\mathcal{G}_k)$ egyenlőséget belátni.

Minden $v \in V$ ponthoz az 5.1.1. lemma alapján elkészítjük azt a \mathcal{G}_v gráfot, melynek élszínezése ekvivalens a lokális útszínezéssel. Az a.) feltétel pontosan azt jelenti, hogy \mathcal{G}_v nem tartalmaz $2k + 1 \geq 5$ hosszú kört. A következő szakaszban bizonyított 7.4.1. tétel szerint ekkor \mathcal{G}_v élgráfja ($\mathcal{G}_{v,e}$ gráf) perfekt, és hatékonyan színezhető $\chi(\mathcal{G}_{v,e}) = \omega(\mathcal{G}_{v,e}) \leq \omega(\mathcal{G}_k)$ színnel (az

egyenlőtlenség abból adódik, hogy a $\mathcal{G}_{v,e}$ gráf \mathcal{G}_k részgráfja). A lokális problémák megoldása után a 6.1.1. lemma miatt a teljes igényhalmaz kielégíthető $\mathbf{W} = \max_{v \in V} \chi(\mathcal{G}_{v,e}) \leq \omega(\mathcal{G}_k)$ szín felhasználásával.

A perfektség hatékony ellenőrizhetősége szintén a 7.4.1. tételből következik majd. \square

Megemlítjük, hogy a bizonyítás nem használta fel a 7.3.2. állítás és a 7.2.1. tétel eredményeit.

Végül az intervallumgráfok perfektségéről szóló állítás egy szép általánosítását közöljük, mely az előbbi tétel következménye.

7.3.2. Tétel. *Egy irányítatlan fa esetén a $\Delta_{\mathcal{F}} \leq 4$ maximális fokszámú fákön tetszőleges \mathcal{I} igényhalmaz konfliktus gráfja perfekt, és ez nagyobb fokszámú fákra nem teljesül.*

Bizonyítás: Legfeljebb negyedfokú fákra az *a.)* feltétel mindig teljesül, viszont ötödfokú pontot tartalmazó fákon kialakítható 5-körkommunikáció. \square

7.4. Erős perfekt gráf sejtés élgráfokra

Ebben a szakaszban egy algoritmikus bizonyítást adunk arra, hogy az élgráfok is kielégítik az erős perfekt gráf sejtést, ezzel teljessé tesszük a 7.3.1. tétel bizonyítását. A szakaszban \mathcal{G} egy irányítatlan hurokél mentes, de többszörös éleket tartalmazó gráfot jelöl, melynek élgráfját \mathcal{G}_e -vel jelöljük. A $\mathcal{G}(V, E)$ gráfban a három pont között futó élek számának maximuma legyen $h_{\mathcal{G}}$. Korábban beláttuk a 7.2.2. lemmában, hogy

$$\omega(\mathcal{G}_e) = \max\{h_{\mathcal{G}}, \Delta_{\mathcal{G}}\}.$$

Először az erős perfekt gráf sejtés feltételei között szereplő C_{2k+1} feszített köröket és \bar{C}_{2k+1} azok komplementereit vizsgáljuk élgráfok esetén. Egyszerűen megmutatható, hogy egy élgráf nem tartalmaz \bar{C}_{2k+1} körkomplementert $2k+1 \geq 7$ esetén, azonban ezt az állítást nem használjuk, ezért bizonyítását nem részletezzük.

7.4.1. Lemma. *A \mathcal{G} gráf $t \geq 4$ hosszú körében szereplő éleknek megfelelő pontok a \mathcal{G}_e élgráfban egy C_t kört feszítenek ki. A \mathcal{G}_e élgráf egy $t \geq 4$*

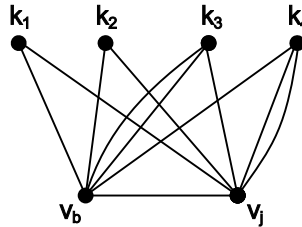
hosszú C_t feszített körében szereplő pontoknak megfelelő élek egy t hosszú kört alkotnak \mathcal{G} -ben.

Bizonyítás: A \mathcal{G} gráf $t \geq 4$ hosszú körében szereplő élek bármelyikére két él illeszkedik, ezért \mathcal{G}_e -ben egy 2-reguláris összefüggő gráfot vagyis egy kört feszítenek ki a megfelelő pontok. Fordítva, a \mathcal{G}_e élgráf egy $t \geq 4$ hosszú C_t feszített körében szereplő pontoknak megfelelő élek közül bármelyik él két egymástól független élhez illeszkedik, ezért az élek egy 2-reguláris összefüggő gráfot, azaz kört alkotnak. \square

Adottak a $\mathcal{G}_1(V_1, E_1)$ és a $\mathcal{G}_2(V_2, E_2)$ gráfok, melyeknek egyetlen közös pontja v . A gráfok élgráfjai $\mathcal{G}_{1,e}$ ill. $\mathcal{G}_{2,e}$, továbbá $\mathcal{G} = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. A konstrukcióból adódóan a v pont \mathcal{G} -ben elvágó.

7.4.2. Lemma. Ha $\chi(\mathcal{G}_{1,e}) = \omega(\mathcal{G}_{1,e})$ és $\chi(\mathcal{G}_{2,e}) = \omega(\mathcal{G}_{2,e})$, akkor $\chi(\mathcal{G}_e) = \omega(\mathcal{G}_e)$.

Bizonyítás: Legyen a \mathcal{G} gráfban a v ponthoz illeszkedő élek halmaza E_v , a v pont foka $d = |E_v|$. Először kiszínezzük az E_v éleket d színnel. Az $E_1 \setminus E_v$ és a $E_2 \setminus E_v$ élelmalmazokra használhatjuk ugyanazokat a színeket, ezért a színezés befejezhető $\max\{\chi(\mathcal{G}_{1,e}), \chi(\mathcal{G}_{2,e}), d\} = \max\{\omega(\mathcal{G}_{1,e}), \omega(\mathcal{G}_{2,e}), d\} = \omega(\mathcal{G}_e)$ színnel. \square



13. ábra. Egy korona alakú gráf.

A $\mathcal{G}(V, E)$ gráfot *koronának* nevezzük, ha $V = \{v_b, v_j, k_1, k_2, \dots, k_l\}$ és gráfban nincsen $\{k_i, k_j\}$ él, és minden k_i -ből vezet legalább egy-egy él v_b -be és v_j -be. A 13. ábrán mutatunk egy példát egy korona gráfra, ahol $l = 4$. A továbbiakban a v_b bal alsó és a v_j jobb alsó pontok között futó éleket *vízszintesnek* nevezzük.

7.4.3. Lemma. *Egy \mathcal{G} korona élei hatékonyan színezhetőek $\chi(\mathcal{G}_e) = \omega(\mathcal{G}_e)$ színnel.*

Bizonyítás: A koronában a vízszintes élek száma m , ezek elhagyásával kapjuk a \mathcal{G}^- gráfot. A \mathcal{G}^- gráf páros, ezért élei hatékonyan színezhetőek $\Delta_{\mathcal{G}^-}$ színnel. Továbbá minden vízszintes élre egy-egy új szint kell használnunk (m szín). Ha \mathcal{G}^- gráfban v_b vagy v_j foka maximális, akkor $\Delta_{\mathcal{G}} = \Delta_{\mathcal{G}^-} + m$. Ha valamely k_i pont foka maximális, akkor $h_{\mathcal{G}} = \Delta_{\mathcal{G}^-} + m$. Így a felhasznált színek száma $\Delta_{\mathcal{G}^-} + m = \max\{\Delta_{\mathcal{G}}, h_{\mathcal{G}}\} = \omega(\mathcal{G}_e)$. \square

7.4.4. Lemma. *Ha a \mathcal{G} gráf előáll a négy pontú teljes gráf éleinek megszorozásával, akkor \mathcal{G} élei hatékonyan színezhetőek $\chi(\mathcal{G}_e) = \omega(\mathcal{G}_e)$ színnel.*

Bizonyítás: Az állítás hasonlóan igazolható az előző lemmához. \square

Ennyi előkészület után kimondjuk és igazoljuk a szakasz legfontosabb tételét.

7.4.1. Tétel. *Egy irányítatlan \mathcal{G} gráfra az alábbi állítások ekvivalensek:*

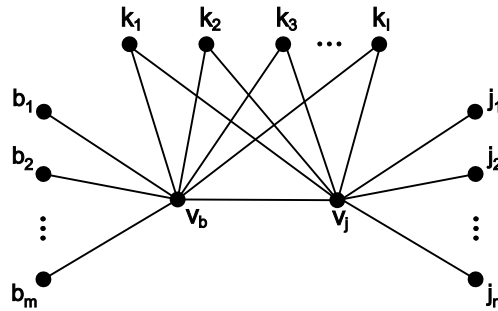
- a.) *a \mathcal{G} gráf nem tartalmaz háromnál hosszabb páratlan kört;*
- b.) *a \mathcal{G}_e élgráf perfekt;*
- c.) *a \mathcal{G}_e élgráf nem tartalmaz $2k + 1 \geq 5$ hosszú C_{2k+1} kört vagy annak \bar{C}_{2k+1} komplementerét feszített részgráfként.*

Továbbá létezik hatékony eljárás, mely tetszőleges \mathcal{G} esetén polinom időben eldönti, hogy \mathcal{G}_e perfekt-e, ha igen, akkor ki is színezi $\chi(\mathcal{G}_e)$ színnel az éleket.

Bizonyítás: A bizonyítás előtt külön felhívjuk rá a figyelmet, hogy az a.) feltételben szereplő C_{2k+1} tetszőleges (nem feltétlenül feszített) kör \mathcal{G} -ben.

A b.) \implies c.) állítás nyilvánvaló a c.) \implies a.) állítást a 7.4.1. lemmában igazoltuk. A továbbiakban az a.) \implies b.) következtetést igazoljuk. Először megjegyezzük, hogy tetszőleges feszített részgráf élgráf, és ha az a.) tulajdonság teljesül, akkor a feszített részgráfokban is teljesül, ezért elegendő a $\chi(\mathcal{G}_e) = \omega(\mathcal{G}_e)$ egyenlőséget belátni.

A \mathcal{G} gráfban lévő háromszögek számát r -rel jelöljük. Azt az állítást, hogy tetszőleges háromnál hosszabb páratlan kört nem tartalmazó \mathcal{G} gráf élei $\chi(\mathcal{G}_e) = \omega(\mathcal{G}_e)$ színnel színezhetőek r -re vonatkozó teljes indukcióval



14. ábra. A v_b és v_j pontok, valamint a közös, bal és jobb szomszédok.

igazoljuk. Az $r = 0$ esetben \mathcal{G} páros, ezért élgráfja $\Delta_{\mathcal{G}} = \omega(\mathcal{G}_e)$ színnel színezhető. A továbbiakban a $\{0, 1, \dots, r\} \implies \{r+1\}$ implikációt igazoljuk.

Tegyük fel, hogy \mathcal{G} tartalmaz egy háromszöget, melynek két pontja v_b és v_j . Az olyan pontokat, amelyekből vezet él v_b vagy v_j pontokba *szomszédoknak* nevezzük. Közülük a k_1, k_2, \dots, k_l közös *szomszédok* mindkét ponttal szomszédosak, a b_1, b_2, \dots, b_m *bal szomszédok* csak v_b -vel, és j_1, j_2, \dots, j_n *jobb szomszédok* csak v_j -vel szomszédosak. Mivel v_b és v_j egy háromszög két pontja, $l \geq 1$. A jelölések a 14. ábrán láthatóak. Az alábbiakban három esetet különböztetünk meg.

- 1.) Valamely k_{i_1} -ből vezet él valamely j_{i_2} -be vagy b_{i_3} -ba. Ekkor $l = 1$, különben $l > 1$ esetén a $v_b, k_{i_1}, j_{i_2}, v_j, k_{i_2}$ pontok egy C_5 mentén helyezkednének el, viszont ez az *a.)* feltételnek ellentmond.
- 2.) Valamely k_{i_1} -ből vezet él valamely k_{i_2} -be. Ekkor $l = 2$, különben $l > 2$ esetén a $v_b, k_{i_1}, k_{i_2}, v_j, k_{i_3}$ pontok egy C_5 mentén helyezkednének el.
- 3.) Szomszéd és a k_{i_1} közös szomszéd között nincs él.

Mielőtt az egyes eseteket megvizsgálánánk kimondunk két fontos állítást.

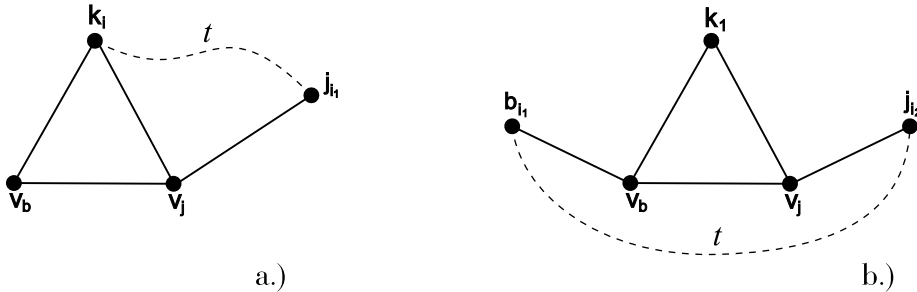
7.4.1. Állítás. A $\mathcal{G} - \{v_b, v_j\}$ gráfban nem vezet $t \geq 2$ hosszú út k_i -ből egyik szomszédba sem.

Bizonyítás: Ha az állítás nem teljesülne, akkor a 15. ábra *a.)* részén láthatóan lenne \mathcal{G} -ben egy $t+2$ és egy $t+3$ hosszú kör is, amelyek közül az egyik egy C_{2k+1} lenne, $2k+1 \geq 5$. \square

7.4.2. Állítás. A $\mathcal{G} - \{v_b, v_j\}$ gráfban nem vezet út b_{i_1} és j_{i_2} között.

Bizonyítás: Egy út a k_i ponton csak az 1.) esetben mehetne keresztül ám ekkor $l = 1$ és $b_{i_1}, v_b, v_j, j_{i_2}, k_i$ egy C_5 mentén helyezkednének el. A k_i pontokat nem érintő, $t \geq 1$ hosszú út esetén a 15. ábra b.) részén láthatóan \mathcal{G} -ben egy $t + 3$ és egy $t + 4$ hosszú kör is lenne, amelyek között szintén lenne C_{2k+1} , ahol $2k + 1 \geq 5$. \square

Most visszatérünk az egyes esetek vizsgálatára a 3.) és 2.) esetekben. A $v_b, v_j, k_1, \dots, k_l$ pontok által feszített részgráfot \mathcal{G}_{v_k} -val jelöljük. A 3.) és 2.) esetekben nincsen él közös és nem közös szomszéd között. Felhasználva továbbá a 7.4.1. ill. a 7.4.2. állításokat adódik, hogy \mathcal{G} -ből \mathcal{G}_{v_k} éleit elhagyva $v_b, v_j, k_1, \dots, k_l$ különböző komponensekbe esnek. A komponenseket $\mathcal{G}_{v_b}, \mathcal{G}_{v_j}, \mathcal{G}_{k_1}, \dots, \mathcal{G}_{k_l}$ -vel jelöljük. Ezek legfeljebb r háromszöget tartalmaznak, így az indukciós feltevés miatt éleik színezhetőek $\omega(\mathcal{G}_{v_b,e}), \omega(\mathcal{G}_{v_j,e}), \omega(\mathcal{G}_{k_1,e}), \dots, \omega(\mathcal{G}_{k_l,e})$ színnel. A 2.) esetben \mathcal{G}_{v_k} előáll egy négy pontú teljes gráf éleinek többszörözésével, a 3.) esetben koronát alkot, ezért alkalmazva a 7.4.4. ill. a 7.4.3. lemmákat \mathcal{G}_{v_k} élei is színezhetőek $\omega(\mathcal{G}_{v_k,e})$ színnel. A $\mathcal{G}_{v_b}, \mathcal{G}_{v_j}, \mathcal{G}_{k_1}, \dots, \mathcal{G}_{k_l}$ gráfoknak egymással nincsen közös pontjuk, és mindegyiknek egy közös pontja van \mathcal{G}_{v_k} -val. Így a 7.4.2. lemma többszöri alkalmazásával adódik, hogy \mathcal{G} élei is színezhetőek $\omega(\mathcal{G}_e)$ színnel.



15. ábra.

Ha az a.) részhez (ill. a b.) részhez) hasonlóan létezne \mathcal{G} -ben a szaggatottal jelölt $t \geq 2$ hosszú (ill. $t \geq 1$ hosszú) út, akkor létezne $t + 2$ és $t + 3$ hosszú (ill. $t + 3$ és $t + 4$ hosszú) kör is.

A teljes indukció befejezéséhez megmutatjuk, hogy az 1.) eset a pontok átnevezésével a 3.) esetre vezethető vissza. A 7.4.2. lemmából következik,

hogy k_1 -nek nem lehet bal- és jobboldali szomszédja is. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy k_1 szomszédai a b_{i_1}, \dots, b_{i_t} pontok. Közülük semelyik kettőre nem illeszkedik él, különben a $b_{i_1}, b_{i_2}, k_1, v_j, v_b$ pontok egy C_5 -öt alkotnának. Így a $v_j := k_1$ átnevezéssel a 3.) esethez jutunk, ezért ekkor is teljesül, hogy \mathcal{G} élei színezhetőek $\omega(\mathcal{G}_e)$ színnel.

Végül a hatékony eldönthetőséggel és színezéssel kapcsolatban megemlítjük, hogy az induktív bizonyítás egy olyan algoritmust sugall, mely a \mathcal{G} élszínezését koronák, négy pontú gráfok, és páros gráfok élszínezésére vezeti vissza. A visszavezetési lépésekben háromszöget kerestünk a gráfban, ami polinom sok lépésben megtehető. Továbbá ha \mathcal{G} tartalmaz C_{2k+1} -et $2k+1 \geq 5$, akkor az a visszavezetési lépések közben egyszerűen kiderül. \square

8. Bővebb gráfosztályok

A dolgozat korábbi részeiben csak nagyon egyszerű szerkezetű hálózatokkal foglalkoztunk. Most semmilyen megkötést nem teszünk a hálózat topológiájára. A WDM-hálózatokban felmerülő konfigurálási probléma három bemenete a színek száma, a topológia és az igényhalmaz. A következő három szakaszban rendre az egyes paraméterek rögzítésére mutatunk egy-egy példát, és vizsgáljuk a feladat nehézségére gyakorolt hatásukat.

Az egy színnel kielégíthetőség **NP**-nehézségét a [9] cikkben publikálta Jansen és Erlebach. A rögzített hálózatok problémája egy általunk fölvetett kérdés, melyet Marx Dániellel közösen oldottunk meg, az elvágó éllel dekomponálható hálózatokról szóló tétel saját eredmény. A one-to-all igényhalmaz optimális színezését a [3] cikkből ismerjük. Az ott szereplő bizonyítás alapötletét felhasználva erősebb állítást is igazolunk a maximális átvitel és a maximális értékű átvitel hatékony megoldhatóságáról az utolsó szakaszban.

8.1. Konfigurálás egy színnel

A hullámhosszak számát $W = 1$ -re rögzítjük, és a feladat egy tetszőleges \mathcal{I} igényhalmaz kielégíthetőségének eldöntése. Másképpen mondva létezik-e a hálózatban az igények végpontjait összekötő páronként éldiszjunkt utaknak egy halmaza. Az éldiszjunkt utak problémája **NP**-nehéz [11], amiből következik az alábbi állítás.

8.1.1. Tétel. [11] *Tetszőleges irányítatlan hálózatban az \mathcal{I} igények $W = 1$ színnel történő kielégítése **NP**-nehéz.* \square

Az éldiszjunkt utak problémájának **NP**-nehézségét több (speciális szerkezetű) gráfosztályra is igazolták, a [9] cikk a hálókat és a síkgráfokat említi, így a fenti állítás igaz ezekre a hálózatokra is. Marx D. a fenti tételnek egy másik élesítését is bizonyította:

8.1.2. Tétel. *Általános irányítatlan gráfban \mathcal{I}_a igényhalmaz esetén az igények $W = 1$ színnel történő kielégítése **NP**-nehéz.* [24] \square

A szakasz jól rávilágít a WDM-hálózatok konfigurálásának nehézségére. Általában az igények kielégítése az útelvezetésből és útszínezésből áll valamilyen hullámhossz korlát mellett. Az együttes megoldás helyett érdemes lenne előbb minimális terhelésű útelvezetést keresni és utána az útszínezést a rögzített útelvezetés mellett megoldani. (Az eljárás nem feltétlenül lenne optimális, de érezhetően egyszerűsítene a feladatot és egy közelítést adna a megoldásra.) Azonban fáknál és csillagoknál a színezés **NP**-nehéznek bizonyult, habár az útelvezetés triviális volt. Továbbá a $\mathbf{W} = 1$ hullámhossz korlát mellett a színezés magától értetődő volna, de már $\mathbf{L} = 1$ terhelésű útelvezetés keresése is **NP**-nehéz.

8.2. Rögzített hálózatok

Ha a hálózatot nem tekintjük az optimalizálási feladat bemenetének, akkor még az általunk feltett legnehezebb kérdésre, a maximális értékű átvitelre is lehet polinom idejű eljárást mutatni. Rögzített hálózatok esetén is végtelen sok különböző igényhalmaz lehet a feladat bemenete, ugyanis egy igényhalmaz tetszőlegesen sok párhuzamos igényt tartalmazhat. Így nem lehetséges minden igénymintára előre eltárolni egy megoldást.

8.2.1. Tétel. *Rögzített $\mathcal{G}(V, E)$ irányított vagy irányítatlan gráfhoz létezik polinom idejű algoritmus, mely tetszőleges \mathcal{I} igényhalmaz, $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^+$ értékfüggvény és $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}^+$ hullámhossz korlát mellett megoldja a maximális értékű átvitel problémát.*

Bizonyítás: A \mathcal{G} hálózatban az éldiszjunkt úthalmazok egy lehetséges felsorolása H_1, H_2, \dots, H_c . A H_j halmazban szerepelő utak végpontjai az I_j egy színnel színezhető igényhalmazt alkotják, $j = 1, \dots, c$. A felsorolások és a c szám a bemenettől függetlenek, előre kiszámíthatóak és eltárolhatóak.

Bármely $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ részhalmaz \mathbf{W} szint használó kielégítése felbontható $H_{i_1}, H_{i_2}, \dots, H_{i_{\mathbf{W}}}$ azonos színű úthalmazokra. Előfordulhat, hogy valamelyik H_j -ből több is szerepel a felbontásban, de $n := \min\{\mathbf{W}, |\mathcal{I}|\}$ számnál több semelyik kielégítésben sem fordul elő. Így $(n + 1)^c$ lépésben végigpróbálhatjuk az összes felsorolást. Egy $H_{i_1}, H_{i_2}, \dots, H_{i_{\mathbf{W}}}$ felsorolás akkor érvényes, ha $\mathcal{I}_{i_1} \cup \mathcal{I}_{i_2} \cup \dots \cup \mathcal{I}_{i_{\mathbf{W}}} \subseteq \mathcal{I}$. (Ahol az unió műveletnél a párhuzamos igényeket nem tekintjük azonosnak!) Az érvényes megoldás értéke is könnyen számítható: ha a megoldás valamely igényből k párhuzamosat tartalmaz, akkor a k legértékesebb igényt kell választani \mathcal{I} -ből és ezek értékét összegezni.

Figyelembe véve, hogy n a bemenet méretével arányos és c konstans, továbbá az ellenőrzés és az összegzés hatékonyan megvalósítható az algoritmus polinom idejű. \square

Az állítás erősnek tűnhet, azonban a bizonyításból látszik, hogy a gyakorlatban csak nagyon kis méretű hálózatokon alkalmazható. Ugyanis a megoldásban szereplő c konstans egy hatalmas szám ($c \gg 2^{|E|}$). Az algoritmus jó példája annak, hogy mekkora különbség lehet a „polinom idejű” és „hatékony” kifejezések között.

A tételnek egy érdekes alkalmazása a korlátos fokszámú fák optimális színezése (ld. 6.4.1. tétel). A bizonyítás lényege az volt, hogy a korlátos fokszámú fák színezése polinom időben visszavezethető rögzített csillag alakú hálózatok színezésére. A 8.2.1. tétel alkalmazási lehetősége az ilyen dekompozíciós eljárásokban rejlik.

Például tegyük fel, hogy egy \mathcal{G} irányítatlan hálózat tartalmaz egy e elvágó élet, melyet elvéve a gráf a \mathcal{G}_1 és \mathcal{G}_2 komponensekre esik szét. A \mathcal{G} gráfon az optimális színezés feladata *elvágó éllel dekomponálható* két (esetleg kisebb méretű) problémára: a $\mathcal{G}_1 \cup \{e\}$ és a $\mathcal{G}_2 \cup \{e\}$ hálózatokban felmerülő igények és igénytöredékek konfigurálására. Ha ezt a dekompozíciós lépést sorozatosan alkalmazva konstans méretű hálózatokhoz jutunk, akkor azokban már alkalmazhatjuk a 8.2.1. tételt az útszínezésre. Ezzel beláttuk az alábbi állítást.

8.2.2. Tétel. *Ha $\mathcal{G}(V, E)$ irányítatlan gráf elvágó éllel konstans méretű hálózatokra dekomponálható, akkor tetszőleges \mathcal{I} igényhalmaz esetén az optimális színezés problémája polinom időben megoldható.* \square

8.3. One-to-all kommunikáció

Végül egy a gyakorlat számára sem érdektelen igényhalmazt vizsgálunk irányított hálózatokon. Az alábbi igényhalmaz egy központi egységhez való hozzáférésnél merülhet fel, amikor mindenki a központba szeretne adatot küldeni vagy onnan adatokat fogadni.

8.3.1. Definíció. *Egy $\mathcal{G}(V, E)$ hálózaton értelmezett \mathcal{I}_o igényhalmazt one-to-all kommunikációnak nevezünk, ha valamely $v \in V$ esetén $\mathcal{I}_o = \{(v, u) \mid u \in V \setminus \{v\}\}$.*

8.3.1. Tétel. *Tetszőleges $\mathcal{G}(V, E)$ irányított hálózat, $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}^+$ hullámhossz korlát és az \mathcal{I}_o one-to-all igényhalmaz esetén a maximális átvitel probléma polinom időben megoldható.*

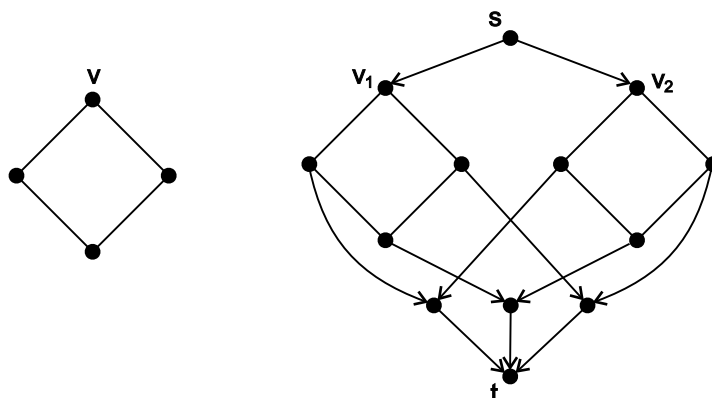
Bizonyítás: A definícióban alkalmazott jelöléssel legyen v a one-to-all kommunikáció forrása. A problémát egytermékes egészértékű folyam algoritmus segítségével oldjuk meg, melyhez definiálunk egy $\mathcal{G}'(V', E')$ irányított hálózatot.

A $\mathcal{G}'(V', E')$ hálózat tartalmazza a

- a $\mathcal{G}(V, E)$ gráf $\mathcal{G}_1(V_1, E_1), \mathcal{G}_2(V_2, E_2), \dots, \mathcal{G}_{\mathbf{W}}(V_{\mathbf{W}}, E_{\mathbf{W}})$ másolatait. A $v \in V$ és az $u \in V \setminus \{v\}$ pontoknak az i -ik másolatba eső párjait v_i -vel és u_i -vel jelöljük.
- Egy s forrás és egy t nyelő pontot.
- A t_u pontokat minden $u \in V \setminus \{v\}$ esetén.
- Az (s, v_i) éleket $i = 1, 2, \dots, \mathbf{W}$.
- Az (u_i, t_u) éleket $i = 1, 2, \dots, \mathbf{W}$ és $u \in V \setminus \{v\}$.
- A (t_u, t) éleket $u \in V \setminus \{v\}$.
- Az (s, v_i) él kapacitása végtelen, a többi él kapacitása 1.

A konstrukcióra egy egyszerű példát mutatunk a 16. ábrán, ahol egy négy hosszú gyűrűhöz tartozó \mathcal{G}' hálózat látható.

A folyamprobléma érvényes egészértékű megoldásaiban, a másolatokban szereplő $E_1, E_2, \dots, E_{\mathbf{W}}$ élhalmazok élein a folyamérték nulla vagy egy. Azon élek, amelyeken nem 0 a folyam v_i -ből valamely u_i pontokba haladó éldiszjunkt utakat alkotnak minden másolatban, $i = 1, 2, \dots, \mathbf{W}$. Bármely $u \in V \setminus \{v\}$ pontra a megoldásban legfeljebb egy i -re létezik $v_i \rightarrow u_i$ út, hiszen az ilyen utak keresztül mennek az egy kapacitású (t_u, t) élen. Ezzel beláttuk, hogy a másolatokban kijelölt utak által kielégített igények \mathcal{I}' halmazára $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}_o$. Az egyes másolatokban szereplő úthalmazok színezésére egyetlen színt használhatunk, így \mathcal{I}' igényei \mathbf{W} színnel kielégíthetők. A megfeleltetés fordítva is elvégezhető, azaz egy tetszőleges \mathbf{W} színnel kielégíthető $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}_o$ részhalmazhoz hozzárendelhető a folyamprobléma egy érvényes megoldása.



16. ábra. Egy négy pontú gráf és a hozzá tartozó \mathcal{G}' hálózat $\mathbf{W} = 2$ esetén.

A konstrukcióból látható, hogy $|\mathcal{I}'|$ megegyezik a folyamértékkel, ezért egy maximális értékű folyam megoldása a maximális átvitel problémának is. Végül az állítás abból adódik, hogy maximális értékű folyam irányított gráfokban polinom időben található [30]. \square

Egészértékű lineáris programozás segítségével az alábbi erősebb állítás is igazolható.

8.3.2. Tétel. *Egy $\mathcal{G}(V, E)$ irányított hálózaton, $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}^+$ hullámhossz korlát mellett az \mathcal{I}_o one-to-all igényhalmazon értelmezett tetszőleges $f : \mathcal{I}_o \rightarrow \mathbf{R}^+$ értékfüggvény esetén a maximális értékű átvitel probléma polinom időben megoldható.*

Bizonyítás: Az előző bizonyításhoz hasonlóan elkészítjük azt a \mathcal{G}' hálózatot, amelyben az egészértékű folyamok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek a \mathbf{W} színnel kielégíthető $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}_o$ részhalmazoknak. Most egy érvényes megoldás értéke $f(\mathcal{I}')$, ami a megfelelő folyam esetén is jól számítható, ugyanis a (t_u, u) élhez $f(v, u)$ értéket rendelve a megoldás összértéke a folyam által használt (t_u, u) élek értékeinek összegzéséből számítható. Ezt a feladatot megfogalmazzuk egészértékű lineáris programozási feladatként.

- x egy $|E'|$ dimenziós változókból álló oszlopvektor, melynek koordinátái az éleknek felelnek meg;

- Az A mátrix a G' irányított gráf élmátrixa, melyből az s és t pontoknak megfelelő sorokat elhagytuk;
- c egy $|E'|$ dimenziós oszlopvektor, amelyben a (t_u, u) éleknek megfelelő helyen $f(v, u)$ áll, a többi helyen 0;

$$\max\{c'x \mid Ax = 0, x \in \{0, 1\}\}$$

Az egészértékű lineáris programozási feladat megoldása a maximális értékű átvitel problémájának is megoldása. Másrészt az A mátrix egy irányított gráf élmátrixa, ezért totálisan unimoduláris [1]. A 4.2.1 tételt alkalmazva az egészértékűségi feltételt elhagyva a folytonos feladat már megoldható a mátrixok és a vektorok méretéhez képest polinom sok lépésben [19]. \square

Végül megjegyezzük, hogy a fentihez hasonló bizonyítás kis módosítással minden olyan igényhalmazra kiterjeszthető, amelyben az igények egy pontból indulnak vagy egy pontba érkeznek.

9. Megoldatlan problémák

A tisztán optikai hálózatok konfigurálása az algoritmikus gráfelmélet egy fiatal alkalmazási területe, számos izgalmas új kérdéssel. Ebben a fejezetben összefoglaljuk az általunk legfontosabbnak ítélt nyitott kérdéseket, melyek a jövőben további kutatások tárgyát képezhetik. Reméljük, hogy az alábbi kérdések megválaszolásában magunk is részt vállalhatunk majd:

- Irányítatlan fák esetén mi a bonyolultsága az all-to-all igényhalmaz optimális színezésének?
- A dolgozatban láttuk, hogy irányítatlan fákön értelmezett igényhalmazok konfliktus gráfjaira teljesül az erős perfekt gráf sejtés, és a perfectség hatékonyan ellenőrizhető. Mi a helyzet az irányított szimmetrikus fákön értelmezett igényhalmazok konfliktus gráfjaival?
- Láttuk, hogy a kettő átmérőjű irányított szimmetrikus fákön értelmezett igényhalmazok optimális színezése hatékonyan megvalósítható, de a négy átmérőjű fákön **NP**-nehéz. Mi a bonyolultsága a három átmérőjű fák színezésének? A feladat már csak azért sem egyszerű, mert tetszőleges igényhalmaz esetén biztosan nem létezik $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}$ szint használó színezés.
- Irányítatlan fákön $\mathbf{W}_{\mathbf{L},\min} = \frac{3}{2}\mathbf{L}$ vagy $\mathbf{W}_{\mathbf{L},\min} = \mathbf{L}$ attól függően, hogy a fában van-e legalább harmadfokú pont. Mi a helyzet az irányított esetben? Bizonyított, hogy egy fán vagy $\mathbf{W}_{\mathbf{L},\min} = \mathbf{L}$ vagy $\frac{5}{4}\mathbf{L} \leq \mathbf{W}_{\mathbf{L},\min} \leq \frac{5}{3}\mathbf{L}$. Ennek a kérdésnek a kapcsán minden olyan példa érdekes lehet, melynél $\mathbf{W}_{\min} > \frac{5}{4}\mathbf{L}$, illetve olyan útszínezési eljárás, amely $\mathbf{W} < \frac{5}{3}\mathbf{L}$ szint használ. Mivel Jansen mutatott egy példát, ahol $\mathbf{L} = 3$ és $\mathbf{W}_{\min} = 5$, továbbá beláttuk, hogy a két harmadfokú pontot tartalmazó három átmérőjű fákön $\frac{5}{4}\mathbf{L} \leq \mathbf{W}_{\mathbf{L},\min} \leq \frac{4}{3}\mathbf{L}$, félő, hogy itt nem kapunk az irányítatlan esethez hasonlóan egyszerű eredményt.
- Az előbbi kérdésnél könnyebb probléma, hogy három átmérőjű irányított szimmetrikus fákön határozzuk meg $\mathbf{W}_{\mathbf{L},\min}$ értékét, és egy legrosszabb esetben optimális színezési eljárást.
- Tetszőleges hálózatban a one-to-all igényhalmaz mellett és láncon tetszőleges igényhalmaz mellett egészértékű lineáris programozási eljárást mutattunk a maximális értékű átvitel probléma megoldására. Érdekes

lenne ezekben az esetekben egyszerű, egészértékű lineáris programozást nem használó eljárások megtalálása is.

- A tisztán optikai hálózatok elméletének egyik nevezetes sejtése, hogy az all-to-all igényhalmazra tetszőleges irányított szimmetrikus gráf esetén teljesül a $\mathbf{W}_{\min} = \mathbf{L}_{\min}$ egyenlőség. Ezt az állítást ebben a dolgozatban fákra igazoltuk, a [2] cikk további gráfosztályokat is megemlít, melyekre már igazolták a sejtést: pl. gyűrűk és hiperkockák.

Hivatkozások

- [1] Andrásfai Béla: *Gráfelmélet*, Polygon, 1994.
- [2] Beauquier, Bermond, Gargano, Hell, Pérennes, Vaccaro: *Graph Problems Arising from Wavelength-Routing in All-Optical Networks*, INRIA 1997.
- [3] Bermond, Gargano, Pérennes, Vaccaro, Rescigno: *Efficient Collective Communication in Optical Networks*, Lecture Notes in Computer Science 1099, 1996 pp. 567-576.
- [4] Chartrand, Oellermann: *Applied and Algorithmic Graph Theory*, McGraw-Hill, 1993.
- [5] *Evolution towards an Optical Network Layer*, Eurescom Project Deliverable P615, 1998.
- [6] *Planning of Full Optical Network*, Eurescom Project Deliverable P709, 1999.
- [7] T. Erlebach, K. Jansen: *Scheduling of Virtual Connections in Fast Networks*, Proc. of Paralell Systems and Algorithms, 1996.
- [8] T. Erlebach, K. Jansen: *Call Scheduling in Trees, Rings and Meshes*, Proc. of HICSS, 1997.
- [9] T. Erlebach, K. Jansen: *The Complexity of Path Coloring and Call Scheduling*, (Preprint).
- [10] Fogaras Dániel, Marx Dániel: *WDM hálózatok konfigurálásánál felmerülő gráfelméleti problémák*, BME-VIK TDK, 1999.
- [11] A. Frank: *Packing Paths, Circuits and Cuts. Paths Flows and VLSI Layout*, page 47-100, Springer Verlag, 1990.
- [12] L. Gargano, P. Hell, S. Pérennes: *Colouring Paths in Directed Symmetric Trees with Applications to WDM Routing*, ICALP'97.
- [13] M. R. Garey, D. S. Johnson, G. L. Miller, and C. H. Papadimitrou. *The complexity of coloring circular arcs and chords*. SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 1(2):216-227, 1980.

- [14] M. C. Golumbic: *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, 1980.
- [15] M. C. Golumbic, R. E. Jamison: *The edge intersection graphs of paths in a tree*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 38 (1985), 8-22.
- [16] I. Holyer: *The NP-completeness of edge-coloring*, SIAM J. Comput. Vol. 10, No. 4, 1981, 718-720.
- [17] Sz. V. Jablonszkij, O. B. Lupanov: *Diszkrét matematika a számítástudományban*, Műszaki Könyvkiadó, 1980.
- [18] K. Jansen: *Approximation Results for Wavelength Routing in Directed Trees*, WOCS 1997.
- [19] Jordán Tibor, Recski András: *Kombinatorikus optimalizálás*, 1995.
- [20] Kaklamanis, C., Persiano, P., Erlebach, T., Jansen, K.: *Constrained Bipartite Edge Coloring with Applications to Wavelength Routing*, ICALP '97.
- [21] Mihail, Kaklamanis, Rao: *Efficient Access to Optical Bandwidth*, IEEE, FOCS '96.
- [22] D. E. Knuth: *The Sandwich Theorem*, The Electronic Journal of Combinatorics 1, 1994, A1.
- [23] V. Kumar, E. J. Schwabe: *Improved Access to Optical Bandwidth in Trees*, SODA '97 (pages 437-444).
- [24] Marx Dániel: *Gráfelméleti problémák tisztán optikai hálózatok tervezésénél*, Diplomaterv 2000.
- [25] T. Nishizeki and K. Kashiwagi: *On the 1.1 edge-coloring of multigraphs*, SIAM J. Disc. Math., 1990, (3(3):391-410).
- [26] Prékopa András: *Lineáris Programozás*, 1968.
- [27] Raghavan, Upfal: *Efficient Routing in All-Optical Networks*, STOC '94.
- [28] Ramaswami, Sasaki: *Multiwavelength Optical Networks with Limited Wavelength Conversion*, IEEE/ACM Transactions on Networking, December 1998.

- [29] Recski András: *Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics*, Akadémiai Kiadó, Budapest és Springer, Berlin, 1989.
- [30] Rónyai Lajos, Ivanyos Gábor, Szabó Réka: *Algoritmusok*, Typotex, 1999.