Bevezetés a számításelméletbe II.

8. gyakorlat 2003 április 4.

Legnagyobb közös osztó, prímek

1. Ha b osztója a-nak, akkor mik lehetnek az értékei a $d(a, a+b)$ és a $d(2a, a-b)$ legnagyobb közös osztóknak?
2. (a) Az euklideszi algoritmus segítségével számítsuk ki az 504 és a 396 legnagyobb közös osztóját!
   (b) Fejezzük is ki a legnagyobb közös osztót $q \cdot 504 + r \cdot 396$ alakban, ahol q és r egészek!
   (c) Mennyi 504 és 396 legkisebb közös többszöröse?
3. Bizonyítsuk be, hogy az
$$\frac{a^3 + 2a}{a^4 + 3a^2 + 1}$$
tört semmilyen a egész esetén sem egyszerűsíthető!
4. Bizonyítsuk be, hogy négy egymást követő pozitív egész szám között mindig van olyan, amelyik a másik három mindegyikéhez (külön-külön) relatív prím.
5. Mutassuk meg, hogy az $1, 2, \ldots, kn$ számok közül bárhogyan választunk ki n darabot, lesz köztük két olyan, amelyek legnagyobb közös osztója nem nagyobb k-nál!
6. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n_1, n_2, \ldots, n_k$ egészekhez található olyan $r > 1$ szám, amelyik minden n_i-vel relatív prím!
7. **HF** A b és c számok relatív prímek és különbségük osztható 5-tel. Igazoljuk, hogy $b+c$ és $2b+7c$ is relatív prímek.
8. **HF** Határozzuk meg a $d(9k+4, 2k-1)$ legnagyobb közös osztót, majd ennek segítségével igazoljuk, hogy $9k+4$ és $2k-1$ legkisebb közös többszöröse legalább k^2, ha $k \geq 3$.
9. **HF** Legyenek k és n olyan pozitív egészek, amelyekre $k < n$. Mi a legnagyobb közös osztója az $n! + 1$ és az $(n+1)! + k$ számoknak?