

# Bevezetés a számításelméletbe II.

7. gyakorlat 2003 március 28.

## Gráfok mátrixai, számelmélet

1. Legyen  $A$  egy egyszerű irányítatlan gráf szomszédsági mátrixa. Mutassuk meg, hogy ha  $A^2$  mátrix minden eleme 0 vagy 1, akkor  $G$  nem tartalmaz négy hosszú kört!
2. Tegyük fel, hogy egy páros gráf nem tartalmaz teljes párosítást. Igazoljuk, hogy adjacencia mátrixa szinguláris, azaz determinánsa nulla! (Segítség: lássuk be, hogy a determinánsban szereplő kifejtési tagok mindegyike 0.)
3. Legyen  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{B}$  egy hurokél-mentes gráf szomszédsági, ill. illeszkedési mátrixa. Mi mondható a  $\mathbf{B}\mathbf{B}^T - \mathbf{A}$  mátrixról?
4. Igazoljuk, hogy öt egymást követő egész szám szorzata osztható 30-al!
5. Lehet-e négy egymást követő prímszám összege is prím?
6. Mutassuk meg, hogy
  - (a)  $24|a(a^2 - 1)$ , ahol  $a$  páratlan egész;
  - (b)  $360|a^2(a^2 - 1)(a^2 - 4)$ , ha  $a$  tetszőleges egész;
  - (c)  $24|a^2 + 23$ , ahol  $a$  2-vel és 3-mal nem osztható szám.
7. Bizonyítsuk be, hogy ha  $2^n - 1$  prím, akkor  $n$  is prím!
8. Bizonyítsuk be, hogy négy egymást követő pozitív egész szám között mindig van olyan, amelyik a másik három mindegyikéhez (külön-külön) relatív prím.
9. Péter a XX. század második felében született, éppen nagyapja 53. születésnapján. Kettejük születési évszámai nem relatív prímelek. Hány éves Péter?