Bevezetés a számításelméletbe II.

2. gyakorlat 2003. február 21.

Színezések, páros gráfok

1. Melyik igaz az alábbi állítások közül?
   (a) Ha egy páros gráfnak létezik Hamilton-köre, akkor páros sok pontja van.
   (b) Ha egy páros grában van Euler-kör, akkor a két pontosztály mérete megegyezik.
   (c) **HF** Ha egy páros gráfban van Euler-kör, akkor páros sok éle van.
2. Mekkora lehet $\omega(G)$ értéke, ha G egy páros gráf?
3. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a maximális klikkméret és a kromatikus szám értékét!

4. A G_n gráf csúcsai az n hosszú 0-1 bitsorozatoknak felelnek meg. Két csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a megfelelö bitsorozatok pontosan egy bitben térnek el egymástól. Határozzuk meg a maximális klikkméretet! És mennyi a kromatikus szám ?
5. Egy G gráf csúcsai az $\{1, 2, \ldots, 100\}$ számoknak felelnek meg. Két csúcs között pontosan akkor fut él, ha a megfelelö i és j számokra $|i - j| \leq 10$ teljesül. Mennyi $\chi(G)$ értéke?
6. Mutassuk meg, hogy bármely G gráf csúcsai sorbarendezhetők úgy, hogy a csúcsokat ebben a sorrendben mohó módon színezve $\chi(G)$ színt használó színezéshez jutunk.
7. A G gráf fokszámainak sorozata $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$. Bizonyítsuk be, hogy
$$\chi(G) \leq \max_{i=1,\ldots,n} \{ \min\{d_i + 1, i\} \}.$$
8. **HF** Egy $n = 2k$ pontú teljes gráfból elhagytuk egy Hamilton-kör éleit. Mennyi az így kapott gráf kormatikus száma?
9. **HF** A $V(G) = \{1, 2, \ldots, 1023\}$ ponthalmazon definiáljunk egy gráfot úgy, hogy két pont között akkor és csak akkor legyen él, ha a két szám közül az egyik osztja a másikat. Határozzuk meg $\chi(G)$ értékét!
10. **HF** Mutassuk meg, hogy egy jo szinezesben legfeljebb $\omega(\overline{G})$ szin lehet egyforma. Ennek segitsegevel mutassunk also korlatot a kromatikus szamra $\omega(\overline{G})$ es a pontok szamanak felhasznalasaval! ($\overline{G}$ a graf komplementeret jeloli.)
11. **HF** Adott a síkon néhány egyenes, melyek közül semelyik három nem metszi egymást egy közös pontban. Tekintsük az egyenesek metszéspontjait egy G gráf pontjainak, és a gráf élei legyenek az egyes egyeneseken szomszédosan elhelyezkedő csúcspárok. Igazoljuk, hogy $\chi(G) \leq 3$. (Segítség: valamilyen mohó színezést érdemes mutatni, csak arra kell rájönni, hogy milyen sorrendben érdemes a pontokat kiválasztani.)