

Bevezetés a számításelméletbe II.
10. gyakorlat 2003. április 18.

Euler-Fermat-tétel, csoportok

- Mely n számokra teljesül, hogy $2\varphi(n) = n$?
- Milyen maradékot ad 99-el osztva
 - 1996^{668}
 - 1996^{659} ?
- Mi az utolsó két számjegye (tíz-es számrendszerben) az alábbi számnak:
 - $1997^{2001^{2005}}$
 - HF** $1997^{2003^{2005}}$?
- Bizonyítsuk be, hogy $n^7 - n$ osztható 42-vel, tetszőleges n egész esetén!
- Félcsoportot, csoportot illetve Abel-csoportot alkot-e az alább megadott H halmaz a $*$ művelettel?
 - H az egész számok halmaza és az $a, b \in H$ számokra $a * b := a + b + 1$, ahol a szokásos összeadás szerepel;
 - $H := \{1, 2, \dots, 6\}$. Továbbá $a * b := ab \pmod{7}$;
 - $H := \{1, 2, \dots, 7\}$. Továbbá $a * b := ab \pmod{8}$;
 - H az egész számok halmaza és az $a, b \in H$ számokra $a * b := a^b$;
 - H azon f függvények halmaza, melyek $f(x) = cx + d$ alakúak, ahol $c \neq 0$. A $*$ művelet pedig a függvények egymás után való alkalmazása (amit analízisből $f \circ g$ -vel jelöltek.)
 - HF** H a valós számok halmaza és $a * b := a + b + ab$.
 - HF** H a 2002 pozitív osztóinak halmaza, és az $a, b \in H$ számokra $a * b := d(a, b)$, azaz a és b legnagyobb közös osztója.
 - HF** H azon modulo m maradékosztályok halmaza, amelyek m -mel relatív prímek. Továbbá $a * b := ab \pmod{m}$;
 - HF** H egy halmaz hatványhalmaza (összes részhalmazinak halmaza), és az $a, b \in H$ részhalmazokkal $a * b := (a \setminus b) \cup (b \setminus a)$ (amit szimmetrikus differenciának is neveznek);
- HF** Melyik az a legkisebb pozitív szám, amely osztóinak száma 9?
- HF** Milyen maradékot ad 103-mal osztva $205^{206^{207}}$?
- HF** Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat!
 - $x^{12001} \equiv 5 \pmod{13}$;
 - $x^{11999} \equiv 5 \pmod{13}$
- HF** Mutassuk meg, hogy ha $a^{12} + b^{12} + c^{12}$ osztható 7-tel, akkor 7^{12} -nel is!
- HF** Mely $m > 1$ egészre és p prímre teljesül, hogy $\varphi(pm) = \varphi(m)$?
- HF** Tudjuk, hogy az a egész számra $a^{100} \equiv 5 \pmod{31}$ és $a^{101} \equiv 19 \pmod{31}$. Milyen maradékot ad 31-gyel való osztáskor az a szám?