Bevezetés a számításelméletbe II.

9. gyakorlat 2002. április 11-12.

Csütörtök 10-12 IB-140 és péntek 8-10 IB-145

Maradékosztályok

1. Az $x \equiv 2 \pmod 3$ és az $x \equiv 5 \pmod 6$ állítások közül melyik következik a másikból?
2. Oldjuk meg a $2x \equiv 2 \pmod{12}$ és a $3x \equiv 5 \pmod 7$ kongruenciákat!
3. Igazoljuk, hogy
   (a) $39^{14} - 1$ osztható 5-tel;
   (b) **HF** $5555^{2222} - 2$ osztható 7-tel.
4. Mi a nagyobb $10^{10^{10}}$ vagy $(10^{10})^{10}$?
5. Mennyi az utolsó számjegye a $13^{15^{17}}$ számnak tízes számrendszerben?
6. Milyen maradékot ad 103-mal osztva $205^{206^{207}}$? (Segítség egy egyszerű trükkel nagyon leegyszerűsíthető a feladat.)
7. Mely m egészre és p prímre teljesül, hogy $\varphi(pm) = \varphi(m)$?
8. Van-e megoldása az alábbi kongruenciának $m = 9, 10$ és 11 esetben?
$$6x \equiv 4 \pmod m$$
9. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:
   (a) $14x \equiv 8 \pmod{21}$,
   (b) $102x \equiv -48 \pmod{45}$ (ZH feladat)
   (c) $4x \equiv 20 \pmod{14}$ (ZH feladat)
   (d) $3^{26}x \equiv 2 \pmod{29}$,
   (e) **HF** $45x \equiv 120 \pmod{96}$,
   (f) **HF** $6x + 1 \equiv 10 \pmod{15}$ (ZH feladat)
10. Mutassuk meg, hogy ha $a^{12} + b^{12} + c^{12}$ osztható 7-tel, akkor 7^{12}-nel is.
11. **HF** Mely n számokra teljesül, hogy $2\varphi(n) = n$?
12. **HF** Bizonyítsuk be, hogy $n^7 - n$ osztható 42-vel, ha n tetszőleges szám. (Vigyázat, n nem feltétlenül relatív prím 42-vel.)
13. **HF** Igazoljuk, hogy $n^{p^p} - n$ osztható p-vel tetszőleges p prím és n egész szám esetén.
14. **HF** Milyen maradékot ad 99-cel osztva 1996^{659} ? (Vegyük észre, hogy ez a feladat kongruenciává alakítható, különben elég sokat kéne számolni.)