Bevezetés a számításelméletbe II.

8. gyakorlat 2002. április 4-5.

`Csütörtök 10-12 IB-140 és péntek 8-10 IB-145`

Oszthatóság

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n szükségszerűen prím.
2. Lehet-e 4 egymásutáni prímszám összege prím?
3. Ha b osztója a-nak, akkor mik lehetnek az értékei a $d(a, a+b)$ és a $d(2a, a-b)$ legnagyobb közös osztóknak?
4. Bizonyítsuk be, hogy négy egymást követő pozitív egész szám között mindig van olyan, amelyik a másik három mindegyikéhez (külön-külön) relatív prím. (ZH feladat)
5. Az euklideszi algoritmus segítségével számítsuk ki a 396 és a 210 számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét.
6. Mutassuk meg, hogy az
$$\frac{a^3 + 2a}{a^4 + 3a^2 + 1}$$
tört egyetlen a egész esetén sem egyszerűsíthető. (Vigyázat, itt nem polinomok legnagyobb közös osztójáról van szó, mert polinomok esetén megengedett a tört együttható is!)
7. Legyenek k és n olyan pozitív egészek, amelyekre $k < n$. Mi a legnagyobb közös osztója az $n! + 1$ és az $(n+1)! + k$ számoknak? (ZH feladat)
8. Melyik az a legkisebb pozitív szám, amely osztóinak száma 9?
9. **HF** Határozzuk meg a $d(9k + 4, 2k - 1)$ legnagyobb közös osztót, majd ennek segítségével igazoljuk, hogy $9k + 4$ és $2k - 1$ legkisebb közös többszöröse legalább k^2, ha $k \geq 3$.
10. **HF** A b és c számok relatív prímek és különbségük osztható 5-tel. Igazoljuk, hogy $b + c$ és $2b + 7c$ is relat relatív prímek.
11. **HF** Mutassuk meg, hogy nincs olyan háromjegyű szám, amely osztóinak száma osztható lenne 11-gyel.
12. **HF** Péter a XX. század második felében született, éppen nagyapja 53. születésnapján. Kettejük születési évszámai nem relatív prímek. Hány éves Péter? (ZH feladat)