

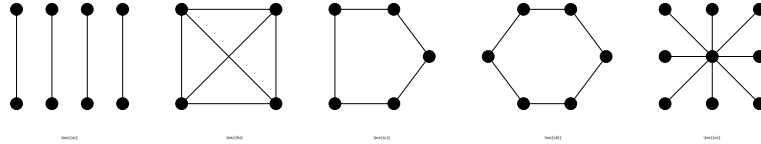
# Bevezetés a számításelméletbe II.

4. gyakorlat 2002. március 7-8.

Csütörtök 10-12 IB-140 és péntek 8-10 IB-145

## Gráfok színezése

1. Határozzuk meg az alábbi gráfok kromatikus számát és maximális klikkméretét!



2. Mennyi  $\omega(G)$ , ha  $G$  egy páros gráf legalább egy éllel?
3. Milyen összefüggés írható fel az  $\omega(\cdot)$  és az  $\alpha(\cdot)$  függvények között?
4. A  $G$  gráfra  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{81}\}$ , továbbá a  $v_i$  és  $v_j$  pontok között pontosan akkor van él, ha  $\frac{i}{j} = 3^k$  valamely  $k \neq 0$  egészszel. Mennyi  $\chi(G)$ ?
5. Bizonyítsuk be a  $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$  egyenlőtlenséget!
6. Igazoljuk, hogy  $\chi(G) \leq \tau(G) + 1$ !
7. Mutassuk meg, hogy bármely  $G$  gráf csúcsai sorbarendezhetőek úgy, hogy a csúcsokat ebben a sorrendben mohó módon színezve  $\chi(G)$  színű színezéshez jutunk.
8. A  $G$  gráf fokszámainak sorozata  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ . Bizonyítsuk be, hogy

$$\chi(G) \leq \max_{i=1, \dots, n} \{ \min\{d_i + 1, i\} \}.$$

9. **HF** A  $V(G) = \{1, 2, \dots, 1023\}$  ponthalmazon definiáljunk egy gráfot úgy, hogy két pont között akkor és csak akkor legyen él, ha a két szám közül az egyik osztja a másikat. Határozzuk meg  $\chi(G)$  értékét!
10. **HF** Bizonyítsuk be, hogy  $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq |V(G)|$ .
11. **HF** Egy  $n = 2k$  pontú teljes gráfból elhagytuk egy Hamilton-kör éleit. Mennyi az így kapott gráf kromatikus száma? Mi a helyzet, ha  $n = 2k + 1$  pontú teljes gráfból hagyjuk el az éleket?
12. **HF** Tetszőleges  $k, l > 0$  egészekre mutassunk példát olyan gráfra, ahol  $\chi(G) = k$ ,  $\alpha(G) = l$  és  $|V(G)| = \chi(G)\alpha(G)$ .
13. **HF** Adott a síkon néhány egyenes, melyek közül semelyik három nem metszi egymást egy közös pontban. Tekintsük az egyenesek metszéspontjait egy  $G$  gráf pontjainak, és a gráf élei legyenek az egyes egyeneseken szomszédosan elhelyezkedő csúcspárok. Igazoljuk, hogy  $\chi(G) \leq 3$ . (Segítség: valamilyen mohó színezést érdemes mutatni, csak arra kell rájönni, hogy milyen sorrendben érdemes a pontokat kiválasztani.)

---

$\alpha(G)$  Egy maximális független ponthalmaz mérete;

$\tau(G)$  Egy minimális lefogó ponthalmaz mérete;

$\nu(G)$  Egy maximális független élhalmaz mérete;

$\rho(G)$  Egy minimális lefogó élhalmaz mérete;

$\Delta(G)$  Maximális fokszám;

$\omega(G)$  Egy maximális méretű klikk pontjainak száma;

$\chi(G)$  Egy minimális számú színt használó színezésben felhasznált színek száma.