Bevezetés a számításelméletbe II.

2. gyakorlat 2002. február 21-22.

Csütörtök 10-12 IB-140 és péntek 8-10 IB-145

Hamilton-körök, páros gráfok és párosítások

1. Bejárható-e egy 7×7-es sakktábla összes mezője egy huszárral úgy, hogy a kiinduló helyre visszatérjünk és minden mezőt pontosan egyszer látogassunk meg? (Segítség: Fogalmazzuk meg a feladatot a gráfok nyelvén, és vegyük észre, hogy nem akármilyen gráfról van szó.)

2. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

   (a) Ha egy gráfnak páros sok pontja van és tartalmaz Hamilton-kört, akkor található benne teljes párosítás.

   (b) Ha egy páros gráfnak van Hamilton-köre, akkor van benne teljes párosítás. (ZH példa, 2000 április)

   (c) Ha egy gráfban van két éldiszjunkt (közös élt nem tartalmazó) teljes párosítás, akkor van benne Hamilton-kör.

3. (a) Az n-pontú K_n teljes gráfból elhagytuk egy feszítőfa éleit, majd visszaraktunk két élet. Mutassuk meg, hogy az így nyert gráfban van Hamilton-kör.

   (b) **HF** Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfnak $\binom{n-1}{2} + 2$ éle van, akkor van benne Hamilton-kör. Igaz-e ez $\binom{n-1}{2} + 1$ pontú gráfokra is?

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges r-reguláris páros gráf tartalmaz teljes párosítást.

5. Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban az A független halmazba eső $X \subseteq A$ részhalmaz összes csúcsa lefedhető egyetlen M párosítással. Hasonlóképp, létezik olyan M' párosítás, amely az $Y \subseteq B$ részhalmazba tartozó összes pontot lefedi. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan M'' párosítás, amely lefedi az $X \cup Y$ összes pontját. (ZH-feladat, 1999 április)

6. **HF** A ping-pong VB csapatbajnokságának döntőjét Kína és Japán játsza egymással. Mindegyik csapatban 10 ember van és mindenki összesen 5 meccset játszik az ellenkező ország különböző játékosaival. A közönség szavazatai alapján dől el, hogy melyik játékos kerüljön össze melyikkel. Bizonyítsuk be, hogy a közönség bármilyen döntése mellett megszervezhető 5 fordulóban a döntő. (Egy fordulóban egy játékos legfeljebb egy meccset játszhat.)

7. **HF** Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Tudjuk továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy ha nem, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön. (ZH példa, 2000 április)

8. **HF** Egy páros gráf egyik pontosztályában van olyan X részhalmaz, amelyre $|N(X)| \leq |X| - 2$. Bizonyítsuk be, hogy nincs a gráfban Hamilton-út.