

Bevezetés a számításelméletbe II.

11. gyakorlat 2002. április 25-26.

Csütörtök 10-12 IB-140 és péntek 8-10 IB-145

Lagrange tétele, homomorfizmus, faktorcsoport

1. Az valós számok összeadás művelettel vett csoportjának részcsoportja-e
 - (a) az irracionális számok;
 - (b) a nemnegatív egészek;
 - (c) a páros számok?
2. Legyen G a nem nulla valós számok halmaza a szorzással és H a valós számok az összeadással, továbbá f az $x \mapsto |x|$ leképezés.
 - (a) Homomorfizmus-e valamelyik csoporton az f leképezés?
 - (b) Ha igen, mi a leképezés magja és képe?
3. Mutassuk meg, hogy minden ciklikus csoport kommutatív is.
4. Egy G csoportnak az e egységtől különböző a, b, c elemeire $a^3 = b^5 = c^7 = e$. Bizonyítsuk be, hogy $|G| > 100$.
5. Igazoljuk, hogy minden prím rendű csoport ciklikus is.
6. Legyen G egy tetszőleges csoport és $f(x) := x * x$ egy leképezés G elemeiről G elemeire. Bizonyítsuk be, hogy f akkor és csak akkor homomorfizmus, ha G kommutatív.
7. A G csoport elemei az $n + ki$ alakú komplex számok, ahol $n = 0, 1, \dots, 4$ és $k = 0, 1, 2$. Az $\oplus$ művelet az alábbi képlettel adott:
$$(n_1 + k_1i) \oplus (n_2 + k_2i) := (n_1 + n_2 \pmod{5}) + (k_1 + k_2 \pmod{3})i.$$
 - (a) A H elemeit alkossák a $(n + 0i)$ alakú (valós) számok. H részcsoportja-e G -nek?
 - (b) Ábrázoljuk a komplex számsíkon a H jobb- és baloldali mellékosztályait, és igazoljuk, hogy H normálosztó.
 - (c) Mivel izomorf a G/H faktorcsoport?
8. **HF** Legyen G egy 2001 rendű csoport és $g \in G$ egy 23-rendű eleme. Határozzuk meg g^2 rendjét! (2001 prímfelbontása: $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$)
9. **HF** Legyen G egy kommutatív csoport és az a, b elemek rendje $o(a) = n$ illetve $o(b) = k$. Bizonyítsuk be, hogy $o(ab)$ osztja az n és k legkisebb közös többszörösét.
10. **HF** Lássuk be, hogy egy Abel-csoport bármely részcsoportja normálosztó.
11. **HF** Izomorf-e a modulo 4 maradékosztályok additív csoportja a modulo 8 redukált maradékosztályok multiplikatív csoportjával.
12. **HF** Legyen G az egész számok az összeadással és H a 3-mal osztható számok halmaza.
 - (a) Igazoljuk, hogy H részcsoportja G -nek.
 - (b) Mik lesznek a H bal- illetve jobboldali mellékosztályai? Bizonyítsuk be, hogy H normálosztó.
 - (c) Mivel izomorf a G/H faktorcsoport?