Bevezetés a számításelméletbe

9. gyakorlat 2002, november 4.

Lineáris leképezések

1. Legyen A egy $n \times k$ méretű mátrix és $\underline{b}$ egy n magas vektor. Melyik igaz az alábbi állítások közül?
   (a) Ha az A oszlopai lineárisan függetlenek, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek létezik megoldása.
   (b) Ha az A sorai lineárisan függetlenek, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszernek létezik megoldása.

2. Legyen V_1 a legfeljebb harmadfokú és V_2 a legfeljebb másodfokú polinomok tere. Az $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ leképezés pedig egy $f(x) \in V_1$ függvényhez $2f''(x) + 3f'(x)$-et rendeli. Igazoljuk, hogy lineáris a leképezés! Mi a leképezés kép- illetve magtere? Határozzuk meg ezek dimenzióját is! Írjuk fel a leképezés $[\mathcal{A}]_{B,C}$ mátrixát, ahol
   (a) $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ és $C = \{x^2, x, 1\}$ bázisai a V_1 és V_2 tereknek.
   (b) Mennyi $\mathcal{A}(3x^2 + 5x)$? Ezt számítsuk ki mátrixszorzással is!

3. Legyenek $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ és $\mathcal{B}: V_2 \to V_3$ lineáris leképezések, amelyekre $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Im}\,\mathcal{B}$.
   (a) Mivel egyezik meg $\mathcal{BA}$ leképezés?
   (b) Mutassunk példát olyan $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ transzformációkra, amelyek valamilyen origón átmenő egyenesre történő tükrözések és kielégítik a feladat feltételeit? (Ilyenkor $V_1 = V_2 = V_3 = \mathbb{R}^2$.)

4. Alább egy $\mathcal{A}$ lineáris leképezés mátrixa látható a szokásos bázis(okban) felírva.
   (a) Határozzuk meg $\dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ és $\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ értékét!
   (b) **HF** Adjuk is meg $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ és $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ egy-egy bázisát, majd ezek illetve paraméterek segítségével írjuk fel az összes $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ és $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$-beli vektort!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -8 & 0 & -12 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg közvetlenül a definíciók felhasználásával az $A \in \mathrm{Hom}\mathbb{R}^2$ transzformációk sajátértékeit, a hozzátartozó sajátvektorokat illetve altereket.
   (a) A minden vektort kétszeresére nyújt;
   (b) A minden vektort az $y = 2x$ egyenesre merőlegesen vetít, majd háromszorosára nyújt;
   (c) **HF** A minden vektort az y-tengelyre tükröz.

6. Mik a sajátértékei az alábbi mátrixoknak? Válasszunk ki egy tetszőleges sajátértéket és adjuk meg a hozzátartozó sajátvektorokat is (szabad paraméterek segítségével)!
   (a) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
   (b) **HF** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. Adjunk meg annak az $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek az $[\mathcal{A}]_{B,C}$ mátrixát, amely a $2x + 1y + 2z = 0$ egyenletű sík összes pontját a nullába viszi, és a síkra merőleges vektorokat pedig ötszörösére nyújtja, ahol
   (a) B is és C is a szokásos bázis $\mathbb{R}^3$-ban;

(b) C a szokásos bázis továbbá

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\};$$

(c) B is és C is a fent megadott bázis.

8. **HF** Tekintsük azt a lineáris leképezést, amely tetszőleges pontot az $x+y+z=0$ egyenletű síkra vonatkozó tükörképébe visz. Mi ennek a leképezésnek a mátrixa a szokásos bázisban, melynek elemei az x, az y és a z tengely irányába mutató egységvektorok?

9. **HF** Legyen P_5 a legfeljebb ötödfokú valós együtthatós polinomok tere. Vegyük azt az $f : P_5 \to P_5$ leképezést, melynél $f(p(x)) = \alpha p'(x) + \beta$ valamely rögzített α, β valós számokra. Határozzuk meg az összes olyan α, β párt, amire az f leképezés lineáris lesz.

10. **HF** Egy V vektortér altere W. Igazoljuk, hogy létezik olyan $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris leképezés, melynek

    (a) amelynek képtere W,

    (b) magtere W.

11. **HF** Igazoljuk, hogy bármely $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció esetén $\mathcal{A}u = \mathcal{A}v$ pontosan akkor teljesül, ha $u - v \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.