Bevezetés a számításelméletbe

6. gyakorlat 2002, október 16.

Mátrixok, determináns

FONTOS! Jövő héten október 21-én a V2. épület 707-es teremben lesz gyakorlat. (Október 28-tól ismét a szokásos helyen.)

1. Számold ki az alábbi mátrixokat!

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2001} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2001} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$$

2. Legyen A egy olyan mátrix, amelyben minden sorban és minden oszlopban az elemek összege 0, B pedig egy olyan mátrix, amelynek minden eleme egyenlő. Mi lesz az AB, illetve a BA szorzat, ha a szorzás elvégezhető?

3. Legyen A egy 4×3 méretű mátrix továbbá A'-t úgy kapjuk A-ból, hogy egy P mátrixszal szorozzuk. Melyik oldalról szorozzuk és milyen P mátrixszal, ha azt szeretnénk, hogy
   (a) A' csak abban különbözzön A-tól, hogy benne a második és harmadik oszlopok fordított sorrendben szerepeljenek;
   (b) A'-nek csak két sora legyen, melyek rendre az A 1. és 3. illetve a 2. és 4. sorainak összegeként állnak elő.

4. Legyen A egy $k \times n$ méretű mátrix és x_i egy n magas illetve b egy k magas vektor. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat!
   (a) Ha x_1 és x_2 megoldásai az $Ax = b$ egyenletrendszernek, akkor $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ is megoldás.
   (b) Ha x_0 megoldása az $Ax = 0$ homogén egyenletrendszernek és x_1 megoldása $Ax = b$-nek, akkor $x_1 + x_0$ is megoldása $Ax = b$-nek.
   (c) Ha $Ax = b$-nek egyértelmű a megoldása, akkor A oszlopvektorainak rendszere lineárisan független.

5. A valós számok feletti V vektortérnek egy bázisát alkotják a $b_1, \ldots, b_n$ vektorok. Legyen $v_1 = \alpha b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$, $v_2 = b_1 + \alpha b_2 + b_3 + \ldots + b_n$, $\ldots$, $v_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + \alpha b_n$. Az α paraméter milyen értékeire lesz $v_1, v_2, \ldots, v_n$ szintén bázisa a V vektortérnek?

6. **HF** Keressünk olyan 2×2 méretű A és B mátrixokat, melyekre $AB = 0$, de $BA \neq 0$. (A csupa nullából álló mátrixot jelöli a 0 szimbólum.)

7. **HF** Az $n \times n$ méretű A és B mátrixokat *felcserélhető*nek nevezzük, ha $AB = BA$ teljesül. Igazoljuk, hogy $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ pontosan akkor áll fenn, ha A és B felcserélhetők!

8. **HF** Tegyük fel, hogy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ egy lineáris tér valamely bázisa. Igaz-e, hogy bázist alkotnak az alábbi vektorok is?

$$v_1 - 2v_2 + v_3,\ v_2 - 2v_3 + v_4,\ \ldots,\ v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1},\ \ldots,$$

$$v_{n-2} - 2v_{n-1} + v_n,\ v_{n-1} - 2v_n + v_1,\ v_n - 2v_1 + v_2$$