

Bevezetés a számításelméletbe

5. gyakorlat 2002, október 7.

Determinánsok

FONTOS! Jövő héten a Sch. Kupa miatt nincs gyakorlat. Utána október 21-én a V2. épület 707-es teremben lesz. (Október 28-tól ismét a szokásos helyen.)

1. Mi az alábbi polinomokban x^3 együtthatója?

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3x & 5 & 7 & 1 \\ 2x^2 & 5x & 6 & 2 \\ 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{HF} \begin{vmatrix} 3x^2 & 5 & 7 & 1 \\ 2x^2 & 5x & 6 & 2 \\ 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

2. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

- (a) Ha egy $n \times n$ méretű mátrixnak az elemei racionális számok, akkor a determinánsa is racionális.
(b) Ha egy $n \times n$ méretű mátrixnak az elemei irracionális számok, akkor a determinánsa is irracionális.

3. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat!

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 15 \end{vmatrix}$$

4. Megválasztható-e c értéke úgy, hogy az alábbi mátrix determinánsa ne nulla legyen?

$$\begin{bmatrix} c & c+1 & c+2 \\ c+3 & c+4 & c+5 \\ c+6 & c+7 & c+8 \end{bmatrix}$$

5. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát. A mátrixok $n \times n$ -esek, a nem jelzett elemek értéke 0.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & a_{i,j} = i + j - 1 \\ \text{(b)} & a_{i,j} = \min(i, j) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(c) } \mathbf{HF} & a_{i,j}: i+j \leq n+1 = a_{n,n} = 1 \\ \text{(d) } \mathbf{HF} & a_{i,j} = (i+j-1)^2 \end{array}$$

6. Az $\mathbb{R}^4$ térnek generátorrendszerét alkotják-e az alábbi vektorok?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

7. Legyen A egy n sorból és n oszlopból álló valós mátrix. Ebben a k -adik sor j -edik elemét jelölje a_{kj} . Legyen B az az n -szer n -es mátrix, amiben a k -adik sor j -edik eleme $b_{kj} = \frac{k}{j} a_{kj}$ ($1 \leq k, j \leq n$) Mennyi B determinánsa, ha tudjuk, hogy A determinánsa 1? (ZH, 2000 november)
8. **HF** Egy $n \times n$ méretű mátrix *mellékátlójának* a jobb felső és a bal alsó sarkot összekötő szakaszon lévő elemeket nevezik. Az $n \times n$ méretű A mátrixról tudjuk, hogy mellékátlója alatt csak 0 szerepel, továbbá a mellékátlóban az $1, 2, \dots, n$ számok szerepelnek ebben a sorrendben. Határozzuk meg $\det A$ értékét!
9. **HF** Az $n \times n$ méretű A mátrix minden eleme páros szám. Tudjuk, hogy $\det A$ osztható 64-gyel, de nem osztható 128-cal. Adjuk meg n összes lehetséges értékét. (ZH példa, 1999 november)
10. **HF** Egy $n \times n$ -es mátrix minden eleme -1 vagy 1. Bizonyítsuk be, hogy $n \geq 3$ esetén a mátrix determinánsa osztható néggyel. (Segítség: használjuk a kifejtési tételt és alkalmazzunk teljes indukciót.)
11. **HF** Az egyjegyű számokat tartalmazó $n \times n$ -es mátrix minden sora n jegyű számként is olvasható. Mi több, az így kapott számok mindegyike osztható 2002-vel. Lássuk be, hogy a determináns is osztható 2002-vel?