Bevezetés a számításelméletbe

4. gyakorlat 2002, szeptember 30.

Bázis, dimenzió, Gauss-elimináció

1. Hány közös pontja van az alábbi síkoknak?

(a) $\begin{aligned} 2x+3y-2z &= 4 \\ -3x-4{,}5y+3z &= -2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ 2x+3y-z &= 4 \\ -x-y+2z &= 1 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x+2y+z &= 6 \\ 2x+4y-z &= 4 \end{aligned}$

2. A d paraméter mely értéke mellett függ lineárisan v az U vektorrendszertől?

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a V vektortérben az $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ egy lineárisan független rendszer és a $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{k+1}\}$ pedig egy generátorrendszer, akkor a két vektorrendszer közül pontosan az egyik bázist alkot V-ben!

4. Az s paraméter mely értéke mellett bázisa $\Re^3$ térnek az alábbi vektorrendszer?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ s \end{pmatrix} \right\}$$

5. A V vektortér két alterének, V_1-nek és V_2-nek a nullvektor az egyetlen közös eleme. Bizonyítsuk be, hogy $\dim V_1 + \dim V_2 \le \dim V$.

6. Létezik-e olyan egyenes, amely az adott 3 sík mindegyikével párhuzamos? Ha igen, akkor adjuk meg közülük az origón átmenőt.

$$\begin{aligned} 2x+4y+3z &= 1 \\ x+7y+4z &= 3 \\ 3x-5y-z &= 2 \end{aligned}$$

7. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásait az s és t paraméterek függvényében!

$$\begin{aligned} sx+tz &= 2 \\ sx+sy+4z &= 4 \\ sy+2z &= t \end{aligned}$$

8. **HF** Oldjuk meg a Gauss-elimináció segítségével az alábbi egyenletrendszereket!

(a) $\begin{aligned} x+-2y+z &= -1 \\ 6x+2z &= 3 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x+3y-2z &= 4 \\ 2x+8y-2z &= -1 \\ 3x+13y-3z &= 2 \end{aligned}$

9. **HF** Adott egy négy ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer, melynek megoldásainak halmaza $\mathcal{S}$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{S}$ alterét alkotja az $\Re^4$ térnek!

10. **HF**

(a) Mutassuk meg, hogy az egyváltozós valós függvények terének alterét alkotják az $f(x) = a + b\cos x + c\cos^2 x$ alakú függvények, ahol a, b, c tetszőleges valós konstansok.

(b) Igazoljuk, hogy a $B_1 = \{1, \cos x, \cos^2 x\}$ és a $B_2 = \{1, \cos x, \cos 2x\}$ vektorrendszerek bázisai az altérnek.

(c) Írjuk fel a $\frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\cos x}{3}$ vektor koordinátáit a két bázisban.