

Bevezetés a számításelméletbe

4. gyakorlat 2002, szeptember 30.

Bázis, dimenzió, Gauss-elimináció

1. Hány közös pontja van az alábbi síkoknak?

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \begin{array}{rcl} 2x + 3y - 2z & = & 4 \\ -3x - 4,5y + 3z & = & -2 \end{array} & \text{(b)} \quad \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 6 \\ 2x + 3y - z & = & 4 \\ -x - y + 2z & = & 1 \end{array} & \text{(c)} \quad \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 6 \\ 2x + 4y - z & = & 4 \end{array} \end{array}$$

2. A d paraméter mely értéke mellett függ lineárisan v az U vektorrendszerrel?

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a V vektortérben az $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ egy lineárisan független rendszer és a $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{k+1}\}$ pedig egy generátorrendszer, akkor a két vektorrendszer közül pontosan az egyik bázist alkot V -ben!

4. Az s paraméter mely értéke mellett bázisa $\mathbb{R}^3$ térnek az alábbi vektorrendszer?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ s \end{pmatrix} \right\}$$

5. A V vektortér két alterének, V_1 -nek és V_2 -nek a nullvektor az egyetlen közös eleme. Bizonyítsuk be, hogy $\dim V_1 + \dim V_2 \leq \dim V$.
6. Létezik-e olyan egyenes, amely az adott 3 sík mindegyikével párhuzamos? Ha igen, akkor adjuk meg közülük az origón átmenőt.

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y + 3z & = & 1 \\ x + 7y + 4z & = & 3 \\ 3x - 5y - z & = & 2 \end{array}$$

7. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásait az s és t paraméterek függvényében!

$$\begin{array}{rcl} sx + tz & = & 2 \\ sx + sy + 4z & = & 4 \\ sy + 2z & = & t \end{array}$$

8. **HF** Oldjuk meg a Gauss-elimináció segítségével az alábbi egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & -1 \\ 6x + 2z & = & 3 \end{array} & \text{(b)} \quad \begin{array}{rcl} x + 3y - 2z & = & 4 \\ 2x + 8y - 2z & = & -1 \\ 3x + 13y - 3z & = & 2 \end{array} \end{array}$$

9. **HF** Adott egy négy ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer, melynek megoldásainak halmaza $\mathcal{S}$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{S}$ alterét alkotja az $\mathbb{R}^4$ térnek!

10. **HF**

- (a) Mutassuk meg, hogy az egyváltozós valós függvények terének alterét alkotják az $f(x) = a + b \cos x + c \cos^2 x$ alakú függvények, ahol a, b, c tetszőleges valós konstansok.
- (b) Igazoljuk, hogy a $B_1 = \{1, \cos x, \cos^2 x\}$ és a $B_2 = \{1, \cos x, \cos 2x\}$ vektorrendszerek bázisai az alternek.
- (c) Írjuk fel a $\frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\cos x}{3}$ vektor koordinátáit a két bázisban.