Bevezetés a számításelméletbe

3. gyakorlat 2002. szeptember 22.

Generálás, generátorrendszer, lineáris függetlenség

1. Mi a generátuma a térben az $(1, 5, 6)$ és a $(0, 2, 4)$ vektoroknak? Vektortér-e az így kapott halmaz?

2. Legyen U egy vektorrendszer, ahol $U = \{ (4, 0, -4), (0, 1, -1), (1, 1, -2) \}$. Generálja-e U a $(2, 3, -5)$ illetve az $(2, 3, 5)$ vektorok valamelyikét? Generátorrendszer-e U a valós számhármasok (három magas számoszlopok) terén? Lineárisan független-e a az U vektorrendszer?

3. Tegyük fel, hogy egy (tetszőleges) V vektortér $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ elemeire $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$ fennáll. Igazoljuk, hogy $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$ teljesül!

4. Legyen U a V tér legalább két eleméből alkotott vektorrendszer. Melyik igaz az alábbi állítások közül?
   (a) Ha U generátorrendszer V-ben, akkor U egy tetszőleges vektorát törölve ismét generátorrendszerhez jutunk.
   (b) Ha U generátorrendszer V-ben, akkor U-hoz tetszőleges vektort hozzávéve ismét generátorrendszerhez jutunk.
   (c) Ha U lineárisan független, akkor U egy tetszőleges vektorát törölve ismét lineárisan független rendszerhez jutunk.
   (d) Ha U lineárisan független, akkor U-hoz tetszőleges vektort hozzávéve ismét lineárisan független rendszerhez jutunk.

5. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi vektorrendszer lineárisan független!

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

6. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ három olyan vektor, melyek lineárisan független vektorrendszert alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy az $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b} + \underline{c}$ és $\underline{c} + \underline{a}$ vektorokból alkotott rendszer is lineárisan független!

7. **HF** Tegyük fel, hogy egy (tetszőleges) V vektortér $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ elemeire $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d} = \underline{0}$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
   (a) $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$;
   (b) $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{c}, \underline{d} \rangle$;
   (c) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$;
   (d) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$.

8. **HF** Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független vektorok és λ skalár egy vektortérben. Elkészítjük az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, $\underline{a} - \underline{b} - \underline{c}$, $\underline{b} - \nu \underline{c}$ vektorokat. Határozzuk meg, hogy a ν skalár mely értékei mellett lesz ez utóbbi három vektor lineárisan független!

9. **HF** Az $U := \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k\}$ egy lineárisan független vektorrendszer, továbbá $\underline{x} := \sum_{i=1}^{k} c_i \underline{a}_i$ egy vektor, valamely c_i skalárokkal. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a}_1 \in \langle \underline{x}, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \rangle$ akkor és csak akkor teljesül, ha $c_1 \neq 0$.

10. **HF** Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok elemei, V pedig altere egy $\Re$ feletti véges dimenziós vektortérnek, továbbá $\underline{a} + \underline{b} \in V$, $\underline{c} + 3\underline{a} \in V$, de nem igaz, hogy $\underline{b} + 2\underline{c} \in V$. Mutassuk meg, hogy $6\underline{a} + 3\underline{b} + \underline{c} \in V$, de nem igaz, hogy $5\underline{a} + 3\underline{b} + \underline{c} \in V$!.