Bevezetés a számításelméletbe
2. gyakorlat 2002. szeptember 16.

Vektorterek, koordináta geometria

1. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelyik átmegy az origón és merőleges a $(2,3,4)$ vektorra! Írjuk fel az ezzel párhuzamos $(1,1,1)$ pontot metsző síkét is!

2. Írjuk fel a $(12,-1,9)$ ponton átmenő és az $x = 3+7t$, $y = -8+5t$, $z = -t$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét. Állítsuk elő az egyenest két sík metszeteként is!

3. Határozzuk meg a 3 dimenziós térben az $(1,1,1)$ és $(2,2,4)$ pontokon átmenő egyenesnek és a $2x+3y-z=2$ egyenletű síknak a metszetét.

4. Legyen V az origó középpontú körök halmaza hozzávéve az egyetlen pontból álló 0 sugarú és az egész síkot tartalmazó ∞ sugarú kört. Két kör összege egy olyan alakzat, amely a körök metszeteként áll elő. A $\lambda \in \mathbf{R}$ skalárral való szorzás eredményeként olyan körhöz jutunk, melynek sugara az eredeti $|\lambda|$-szorosa. (A ∞ sugarú körből mindig ∞ sugarú lesz.) Vektor tér-e V a fenti műveletekkel?

5. Legyen V a pozitív valós számok és T a valós számok halmaza. Definiáljuk a $\oplus$ vektorok közti összeadást és a $\odot$ skalárral való szorzást a következőképpen:
$$u \oplus v = uv,\ \ \lambda \odot v = v^{\lambda},$$
ahol az egyenlőségek jobb oldalán a valós számok szokásos szorzása, illetve hatványozása szerepel. Vektorteret kapunk-e így?

6. A vektortér axiómák segítségével igazoljuk, hogy egy V vektortérben minden $v \in V$ vektorra
   (a) $0 \cdot v = \underline{0}$,
   (b) $(-1) \cdot v = -v$.

7. Az (x_1, x_2, x_3, x_4) valós számnégyesekből alkotott térnek alterét alkotják-e azok a vektorok, melyekre teljesül
   (a) $4x_3 + 5x_4 = 1$, illetve (b) $2x_1 + 3x_2 = 4x_3$?

8. Bizonyítsuk be, hogy egy vektortér két tetszőleges alterének metszete is alteret alkot.

9. Kifejezhető-e a $(4,0,-4)$, $(0,1,-1)$, $(1,1,-2)$ vektorokból a $(2,3,-5)$ illetve a $(5,6,7)$ vektorok valamelyike a skalárral való szorzás és az összeadás segítségével?

10. **HF** Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelyik az x tengelyt 4-nél, az y tengelyt -2-nél és a z tengelyt 7-nél metszi?

11. **HF** Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelyik átmegy a $(-1,3,3)$, a $(-3,1,1)$, és a $(2,-2,3)$ pontokon!

12. **HF** Legyen V az egész számok halmaza a szokásos összeadással. Továbbá a λ skalárral való szorzás $\odot$ műveletét a $\lambda \odot v := \lfloor \lambda v \rfloor$ művelettel definiáljuk. Vektorteret alkot-e V az előbbi műveletekkel?

13. **HF** Az $S = (a_0, a_1, \ldots)$ valós számsorozatok vektorteret alkotnak a valós számtest felett, ahol a sorozatok összegét az elemek összegéből, a skalárszorosát az elemek skalárszorosából alkotott sorozatként értelmezzük. Alteret alkotnak-e a tér alábbi részhalmazai?
    (a) $\{\, S \mid \exists \lim_{n\to\infty} a_n \,\}$
    (b) $\{\, S \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \,\}$
    (c) $\{\, S \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \,\}$

14. **HF** Legyen V egy vektortér, melynek alterei V_1 és V_2. Tudjuk továbbá, hogy V_1 és V_2 közül egyik sem altere a másiknak. Igazoljuk, hogy $V_1 \cup V_2$ nem altere V-nek! Mutassunk példát az állításra a (szokásos) térben!