

Bevezetés a számításelméletbe

11. gyakorlat, 2002. november 24.

Számosságok, leszámolás

- (Múltkori feladatsorból) Bizonyítsuk be, hogy az alábbi halmazok megszámlálható (\aleph_0) számosságúak.
 - A sík egész koordinátájú pontjai;
 - A sík racionális koordinátájú pontjai;
 - A racionális számokból alkotott 2×2 -es mátrixok;
 - Az egész koordinátájú háromszögek halmaza (egybevágó háromszögeket egyformáknak tekintünk);
 - Azon bitsorozatok halmaza, amelyben véges sok 1-es fordul elő (de a sorozatok végtelen hosszúak).
- Igazoljuk, hogy az alábbi halmazok kontinuum (\aleph_1) számosságúak.
 - A végtelen hosszú bitsorozatok;
 - A végtelen hosszú csak a , b és c szimbólumokat tartalmazó sorozatok halmaza;
 - A háromdimenziós tér pontjainak halmaza;
 - Valós számsorozatok halmaza;
 - Az egész területű síkbeli háromszögek halmaza.
- Tíz gyerek hányféleképpen állítható úgy sorba, hogy Jancsi és Juliska egymás mellett álljanak?
- Tizenkét vívóból hányféleképpen lehet kialakítani három darab négy fős csapatot, ahol a csapatok nem feltétlenül diszjunktak és
 - a három csapatnak van külön neve is;
 - a csapatoknak nincs nevük.
- Hányféleképpen lehet szétosztani n címkézett üveggolyót egy testvérpár között?
- HF** Hányféle nyaklánc készíthető 100 különböző gyöngyből?
- HF** Nyolc ember szeretne teniszezni három tenispályán úgy, hogy az egyik pályán párost, a két másikon egyéni játszanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a pályákat különbözőeknek tekintjük, de ugyanazon pálya két tételét nem különböztetjük meg? (Természetesen az embereket is különbözőeknek tekintjük, és az is számít, hogy a négy páros meccset játszó játékos között ki kinek a partnere.)
- HF** Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \dots, n$ számoknak, amelyekben a páros és páratlan számok felváltva követik egymást?
- HF** Milyen számosságúak az alábbi halmazok?
 - Természetes számok véges részhalmazainak halmaza;
 - Természetes számok részhalmazainak halmaza;
 - Valós együtthatójú polinomok halmaza;
 - Racionális együtthatójú polinomok halmaza;
 - Egy háromszög belső pontjainak halmaza;
 - Az olyan $0, 1$ és 2 számokat tartalmazó sorozatok, melyekben bármely három egymást követő elem összege osztható hárommal;
 - Az olyan $0, 1$ és 2 számokat tartalmazó sorozatok, melyekben bármely három egymást követő elem összege osztható kettővel;
 - Azon $(1, a_1, a_2, \dots)$ sorozatok halmaza, melyben a szomszédos elemek hányadosa 2 vagy $\frac{1}{2}$.
- HF** (érdekesség) Egy valós számot *kiszámíthatónak* nevezünk, ha van olyan Pascal nyelven írt program, amely a szám tizedesjegyeit meghatározza (pontosabban az n bemenetre a szám első n tizedesjegyét számítja ki). Igazoljuk, hogy léteznek nem kiszámítható számok.
- HF** (érdekesség) A természetes számokon értelmezett tulajdonságot *kiszámíthatónak* nevezzük, ha létezik hozzá olyan program, amely tetszőleges n számra eldönti, hogy a tulajdonság n -re teljesül-e. Például a „hárommal való oszthatóság” egy kiszámítható tulajdonság. Bizonyítsuk be, hogy létezik nem kiszámítható tulajdonság. (Segítség: a tulajdonság nem más, mint a számoknak egy részhalmaza, melyen a tulajdonság igaz.)