Bevezetés a számításelméletbe

10. gyakorlat 2002, november 18.

Komplex számok

1. Végezzük el az alábbi műveleteket!

   a) $(2-i)(5i-3)$ b) $\overline{(2+i)^3}$ c) $\dfrac{4+i}{5-2i}$

   d) i^{18} e) $\left|\dfrac{6+3i}{6-3i}\right|$ f) $\dfrac{1}{2+3i}$

2. Ábrázoljuk a komplex számsík azon z pontjainak a halmazát, amelyekre teljesül, hogy

   (a) $-2 < \text{ Im } z < 1$ (b) $1 < |z| < 2$ (c) $z \cdot \bar{z} = 4$ (d) $z + \bar{z} > 0$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében:

   (a) $z^2 = 2i$
   (b) $z^2 + 2z + 3 = 0$
   (c) $z + \bar{z} = 2|z|$
   (d) **HF** $\begin{vmatrix} z & z+1 \\ 2i & z+i \end{vmatrix} = 0$
   (e) **HF** $z^4 - 3z^2 - 1 = 0$

4. Számítsuk ki a $\sqrt[5]{1+i\sqrt{3}}$ számok trigonometrikus alakjait.

5. Legyen ϵ_1 és ϵ_2 a két nem valós harmadik egységgyök. Számítsuk ki az $\epsilon_1^n + \epsilon_2^n$ értékét, $n = 1, 2, 3, \ldots$

6. Mutassuk meg, hogy

   (a) a 3-mal osztható számok „ugyanannyian vannak", mint az egészek;
   (b) a komplex számok számok „legalább annyian vannak", mint az $y = x$ egyenes pontjai.

7. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi halmazok megszámlálható ($\aleph_0$) számosságúak.

   (a) A sík egész koordinátájú pontjai;
   (b) A sík racionális koordinátájú pontjai;
   (c) A racionális számokból alkotott 2×2-es mátrixok;
   (d) Az egész koordinátájú háromszögek halmaza (egybevágó háromszögeket egyformáknak tekintünk);
   (e) Azon bitsorozatok halmaza, amelyben véges sok 1-es fordul elő (de a sorozatok végtelen hosszúak).

HF 8. Legyen n pozitív egész. Számítsuk ki az összes n-edik egységgyök összegét és szorzatát!

HF 9. Mi a $z = (1-i)^{2000} - i(1+i)^{2002}$ komplex szám kanonikus alakja?

HF 10. Hol helyezkednek el a kompex számsíkon a $z^n = c$ egyenlet gyökei, ha a) c egy tetszőleges pozitív valós szám, b) c egy tetszőleges komplex szám?

HF 11. Mi a mértani helye a komplex számsíkon az $\frac{1+ti}{1-ti}$ alakú számoknak, ha t befutja a valós számok halmazát? És ha az $\frac{1+ti}{t+i}$ alakú számokat nézzük?