Bevezetés a számításelméletbe II.

14. gyakorlat, 2005. május 20.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Gyűrűk

141. Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt (a szokásos szorzásra és összeadásra nézve):

(a) $\{a+b\sqrt{5} : a,b \in \mathbb{Z}\}$;
(b) $\{a+b\sqrt[3]{5} : a,b \in \mathbb{Z}\}$;
(c) $\{\frac{a}{3^n}+b : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$;
(d) $\{a+bi : a,b \in \mathbb{Z}, ab=0\}$;
(e) $\{a_nx^n+\cdots+a_2x^2 : a_n,\ldots,a_2 \in \mathbb{R}\}$;
(f) $\{a_nx^n+\cdots+a_2+a_0x^2 : a_n,\ldots,a_2,a_0 \in \mathbb{R}\}$;
(g) $\{a+bi : a,b \in \mathbb{Z}, b \text{ páros}\}$;
(h) $\{a+bi : a,b \in \mathbb{Z}, a \text{ páros}\}$;

A fenti gyűrűk közül melyik egységelemes, melyik kommutatív, mely elemeknek van multiplikatív inverze?

142. Állapítsuk meg, hogy az alábbi struktúrák közül melyik gyűrű. Ha gyűrű, akkor döntsük el, hogy kommutatív, egységelemes illetve nullosztómentes-e. (Ha kommutatív és nullosztómentes, akkor integritási tartomány.) Továbbá ha egységelemes és nullosztómentes is, akkor nézzük meg, hogy ferdetestről, esetleg testről van-e szó.

(a) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a szokásos összeadással és szorzással;
(b) A páros számok (általában az m-mel osztható egész számok) a szokásos összeadással és szorzással;
(c) Az $n \times n$-es mátrixok $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ felett a szokásos mátrixösszeadással és mátrixszorzással;
(d) A polinomok $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ felett a szokásos polinomösszeadással és polinomszorzással;
(e) Egy H halmaz részhalmazai, az unió és a metszet műveletekkel;
(f) Egy H halmaz részhalmazai, a szimmetrikus differencia és a metszet műveletekkel;
(g) Az adott intervallumon értelmezett folytonos függvények, a képeken végrehajtott összeadással és szorzással;
(h) Az n-nel vett osztási maradékok, a szokásos összeadással és szorzással;
(i) A valós számpárok, az elemenkénti összeadással és szorzással.

143. Legyen az R gyűrűben 0 az additív neutrális elem.

(a) Lássuk be, hogy tetszőleges a elemre $0a = a0 = 0$;
(b) Azt is lássuk be, hogy tetszőleges a, b elemekre $(-a)b = -ab$!

144. A az R gyűrű azon elemeiből áll, amelyekre $a * r = r * a$, minden $r \in R$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy A részgyűrűje R-nek!

145. Legyen R egy egységelemes integritási tartomány, és r egy eleme, amelyre $r * r = r$. Lássuk be, hogy ekkor $r = 0$ vagy $r = 1$!