Bevezetés a számításelméletbe II.

11. gyakorlat, 2005. április 29.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Csoportok

122. Félcsoportot alkotnak-e az alábbi R halmazok a $\circ$ műveletre nézve? Melyik csoport? Melyik Abel-csoport?
   (a) $R =$ a síkvektorok halmaza $\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$
   (b) $R = n \times n$-es nemszinguláris mátrixok, $A \circ B = AB$.
123. Értelmezzük az egész számok halmazán az $a \star b = a + b + 1$ képlettel megadott műveletet. Mutasd meg, hogy $(\mathbb{Z}, \star)$ csoport. Milyen korábbról ismert csoporttal izomorf $(\mathbb{Z}, \star)$?
124. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számhoz található n elemű csoport, és hogy végtelen sok n-re teljesül, hogy az n elemű csoportok izomorfak.
125. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G csoportban minden elem rendje 2, akkor G kommutatív csoport.
126. Lássuk be, hogy ha a és b egy csoport elemei, akkor $a^{-1}ba$ rendje megegyezik b rendjével.
127. A G csoport a, b és c elemei különböznek az e egységtől és $a^3 = b^5 = c^7 = e$. Lássuk be, hogy G-nek legalább 100 eleme van.
128. Adjuk meg az összes 1, 2, 3, illetve 4 elemű nem izomorf csoport művelettábáját.
129. Legyen G egy csoport és $a, b \in G$. Ekkor bizonyítsuk be, hogy
   (a) $o(a) = o(a^{-1})$;
   (b) $o(ab) = o(ba)$;
   (c) $o(a) = o(b^{-1}ab)$;
   (d) ha G Abel-csoport, akkor $o(ab) \le o(a)o(b)$.
130. Legyen G egy csoport, és $G_1 \le G$, $G_2 \le G$. Ekkor igaz-e, hogy
   (a) $G_1 \cup G_2 \le G$;
   (b) $G_1 \cap G_2 \le G$?
131. Hány részcsoportja van a 15 rendű ciklikus csoportnak?
132. Van-e olyan 20 elemű csoport, amelyben
   (a) van 5 rendű elem, de nincs 20 rendű elem; (b) van 20 rendű elem, de nincs 5 rendű elem?
133. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egész szám esetén létezik olyan csoport, amelynek pontosan k darab részcsoportja van!
134. Egy csoport rendje 81 és van olyan eleme, melynek 27. hatványa nem az egységelem. Bizonyítsuk be, hogy a csoport kommutatív.
135. Tekintsünk egy páratlan rendű Abel-csoportot, melyben a műveletet összeadásnak nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy az összes elem összege 0.
136. Írjuk fel az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ permutáció ciklusfelbontását! Számoljuk ki a második, harmadik ill. negyedik hatványát a ciklusfelbontás alapján! Mi az a legkisebb n, amelyre ezen permutáció n-edik hatványa az identitás?
137. Igazold, hogy a következő halmazok S_n-nek generátorrrendszerei:
   (a) $\{(1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n)\}$; (b) $\{(1\,2), (2\,3), \ldots, (n-1\;n)\}$; (c) $\{(1\,2), (1\,2\,3\;\ldots n)\}$.
138. Bizonyítsd be, hogy a páros permutációk egy részcsoportot alkotnak S_n-ben!
139. Határozzuk meg az S_3 csoport összes részcsoportját. Adjuk meg mindegyikhez a bal és jobb oldali mellékosztályokat.

HF

140. A G csoport e egységére és x, y elemeire $x^2 = e$ és $xyx^{-1} = y^3$. Bizonyítsuk be, hogy $y^8 = e$.