Bevezetés a számításelméletbe II.

10. gyakorlat, 2005. április 22.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Számelmélet II.

99. Milyen maradékot ad a $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 200$ szorzat 101-gyel osztva?

100. Legyen p prímszám. $\binom{2p}{p} \equiv ? \pmod{p}$

101. Legyen $m \geq 3$. Bizonyítsuk be, hogy m akkor és csak akkor prím, ha $(m-2)! \equiv 1 \pmod{m}$.

102. Teljes maradékrendszer-e modulo 77 az $\{\ 1, 11, 21, \ldots, 761\ \}$ számhalmaz?

103. Redukált maradékrendszer-e modulo 32 az $\{\ 5, 15, 25, \ldots, 155\ \}$ számhalmaz?

104. Mivel kongruens mod 77 az 1998^{1979} szám?

105. Mi $7^{6^{5^{4^{3^{2}}}}}$ utolsó számjegye a 10-es számrendszerben?

106. Milyen maradékot ad 37-tel osztva az a szám, melynek 10-es számrendszerbeli alakja 37 db egyesből áll?

107. Oldjuk meg: $15x \equiv 2 \pmod{5}$ és $7x \equiv 1 \pmod{13}$

108. Oldjuk meg: $4x \equiv 2 \pmod{6}$ és $2x \equiv 1 \pmod{5}$

109. Mennyi lehet az a, ha $a^{1997} \equiv 4 \pmod{81}$?

110. Legyen n osztható k-val. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi(n)$ is osztható $\varphi(k)$-val.

111. Biz. be, hogy ha n egész szám, a és b pedig nemnegatív egész számok, és $n^{6a} + n^{6b}$ osztható 7-tel, akkor n is osztható 7-tel.

112. Mi $1997^{7^{2000}}$ utolsó két számjegye?

113. Biz. 7 osztja $(5555^{2222} - 2)$-t.

114. Kiszámítandó $(((43^{43})^{43})^{43})^{43}$ modulo 49.

115. Biz. be, hogy a $10^n + 3$ alakú számok között végtelen sok osztható 13-mal.

116. Legyen a p prím esetén $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ RMR $\pmod{p}$. Biz: $a_1^{p-2}, a_2^{p-2}, \ldots, a_{p-1}^{p-2}$ szintén RMR $\pmod{p}$.

117. Biz. minden n-re $\varphi(n^3) = n^2\varphi(n)$.

118. Milyen n-ekre teljesül, hogy $2\varphi(n) = n$?

119. Milyen n-ekre teljesül, hogy $\varphi(7n) = 7\varphi(n)$?

HF

120. Mennyi az 1993^{1993} szám 2004-gyel való osztáskor keletkező maradéka?

121. Az Euler–Fermat-tétel szerint az a és m pozitív egészekre, amennyiben azok relatív prímek, $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \bmod m$. Keressünk olyan a és m számokat, melyek nem relatív prímek, de szintén fennáll rájuk a kongruencia.