# Bevezetés a számításelméletbe II.

9. gyakorlat, 2005. április 15.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

# Számelmélet I.

81. Az $x \equiv 2(3)$ és az $x \equiv 5(6)$ állítások közül melyik következik a másikból? Ami nem következik, arra mutassunk ellenpéldát!
82. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
    (a) $k \mid n,\ a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{k}$
    (b) $k \mid n,\ a \equiv b \pmod{k} \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$
    (c) $a \equiv b \pmod{k},\ a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{kn}$
    (d) $a \equiv b \pmod{k},\ a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{[k,n]}$
    (e) $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow ka \equiv kb \pmod{kn}$
    (f) $a \equiv b \pmod{n},\ c \equiv d \pmod{k} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{kn}$
    (g) $a^2 \equiv b^2 \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv \pm b \pmod{n}$
    (h) $a^2 \equiv b^2 \pmod{101} \Leftrightarrow a \equiv \pm b \pmod{101}$
83. Melyek azok a $p$ prímszámok, amelyekre $p+10$ és $p+14$ is prím?
84. Mutassunk három olyan relatív prím számot, melyek közül semelyik kettő nem relatív prím.
85. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan 3 jegyű szám, melynek osztóinak száma osztható volna 11-gyel.
86. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok $n$-re teljesül, hogy $d(n+1) \geq 2d(n)$.
87. Bizonyítsuk be, hogy minden $a, b$ egészre $d(ab) \leq d(a)d(b)$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a$ és $b$ relatív prímek.
88. Bizonyítsuk be, hogy minden $a$ egészre $d(a) \leq 2\sqrt{a}$.
89. Két pozitív egész szám összege prím, az egyik a másik 30-szorosa. Mik lehetnek ezek?
90. Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor $n$ is prím.
91. Biz. tetszőleges $n$ természetes számra $n^5 - 5n^3 + 4n$ osztható 120-szal.
92. Oldjuk meg az $5x \equiv 8 \pmod{17}$ kongruenciát.
93. Mely pozitív egész számoknak van ugyanannyi páros osztója, mint páratlan?
94. Biz. tetszőleges $n$ természetes szám mellett $n(n^2+5)$ osztható 6-tal.
95. Legyen $n$ páratlan egész szám, amely nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem. Bizonyítsuk be, hogy $n$ osztóinak átlaga egész szám!
96. Igazoljuk, hogy ha az $a$ szám osztóinak a száma páratlan, akkor minden $n > 1$ egészre $a^n$ osztóinak a száma is páratlan.

**HF**

97. Oldjuk meg a kongruenciát: $170x \equiv 78 \pmod{2006}$.
98. Melyik az a legkisebb szám, melynek 10 osztója van? (Csak a pozitív osztókat vesszük figyelembe.)