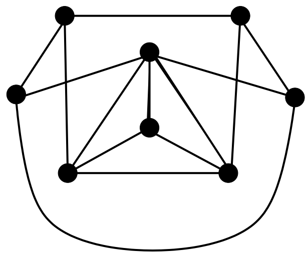
Bevezetés a számításelméletbe II.

2. gyakorlat, 2005. február 25.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Gráfok színezése

15. Hány szín szükséges az alábbi gráf pontjainak kiszínezéséhez?



16. Legyen $V(G) = \{v_1, \ldots, v_{100}\}$, ahol v_i és v_j között akkor és csak akkor megy él, ha $7 \geq |i - j|$. Mennyi G kromatikus száma?
17. Minden páros G gráfra $\chi(G) \leqslant 2$. Mikor nem áll egyenlőség?
18. Bizonyítsuk be, hogy minden páros G gráfra $\chi(G) = \omega(G)$.
19. Legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú páros gráfnak?
20. Mennyi a Petersen-gráf kromatikus száma?
21. Legyen $V(G) = \{v_1, \ldots, v_{106}\}$, v_i és v_j között pontosan akkor van él, ha $|i - j| \leqslant 7$. Mennyi G kromatikus száma?
22. Egy gráf pontjait a sakktáblai mezői alkotják. Pontosan akkor megy él két mező között, ha az egyik mezőről a másikra bástyával át tudunk lépni. Hány színnel színezhető ez a gráf?
23. Legyenek G csúcsai az összes természetes számok és legyen az n és m csúcs éllel összekötve pontosan akkor, ha $n + m$ páratlan. Mennyi a gráf kromatikus száma?
24. A $V(G) = 1, 2, \ldots 1023$ ponthalmazon definiáljuk a G gráfot úgy, hogy benne k és m pontosan akkor van összekötve éllel, ha nem egyenlőek és az egyik osztja a másikat. Határozzuk meg $\chi(G)$ értékét.
25. Hagyjuk el egy $2n$ pontú teljes gráfból egy Hamilton-körének az éleit. Mennyi a keletkező gráf kromatikus száma? Mi a helyzet akkor, ha egy $2n + 1$ csúcsú teljes gráfból indulunk ki?
26. Legyen G és H két különböző gráf (diszjunkt ponthalmazokkal). Készítsünk belőlük egyetlen F gráfot úgy, hogy G minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(F) = \chi(G) + \chi(H)$.
27. Legyen G_1 és G_2 két gráf ugyanazon V csúcshalmazon és jelölje G a $G_1 \cup G_2 = (V, E(G_1 \cup G_2))$ módon megadható gráfot. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leqslant \chi(G_1)\chi(G_2)$.
28. Legyen G olyan hurokmentes gráf, amelynek pontosan $\binom{\chi(G)}{2}$ éle van. Bizonyítandó, hogy G-ben a nem izolált pontok egy $K_{\chi(G)}$-t alkotnak.
29. Adott a síkon egyenesek egy halmaza, melyek közül semelyik három nem megy át egy ponton.
    (a) Legyenek a G_1 gráf csúcsai az egyenesek metszéspontjai – két csúcs pontosan akkor szomszédos G_1-ben, ha a megfelelő metszéspontok valamelyik egyenesen szomszédosak. Igazoljuk, hogy $\chi(G_1) \leqslant 3$.
    (b) Legyenek a G_2 gráf csúcsai az egyenesek által létrehozott tartományok – két csúcs pontosan akkor szomszédos G_2-ben, ha a megfelelő tartományoknak van közös határszakaszuk. Igazoljuk, hogy $\chi(G_2) \leqslant 2$.
30. Bizonyítsuk be, hogy minden gráfnak sorbarendezhetők úgy a csúcsai, hogy ha ebben a sorrendben színezzük a gráfot mohó algoritmussal, akkor $\chi(G)$ színt használunk.
31. Lássuk be, hogy $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.